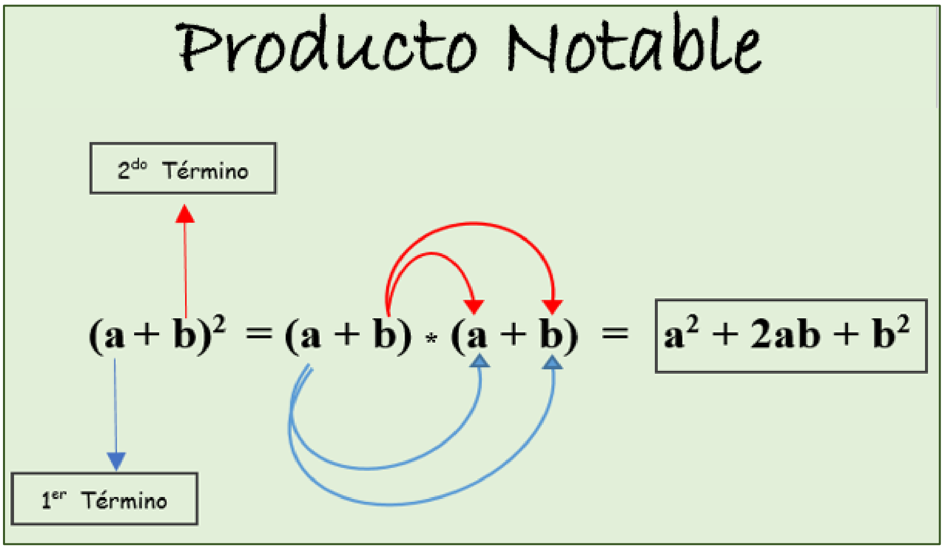
2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS



Objetivos:

- Identificar y clasificar distintas expresiones algebraicas.
- Analizar el comportamiento de las distintas funciones polinómicas
- Generar diferentes estrategias de cálculo y estimar resultados al resolver problemas.
- Evaluar la razonabilidad y validez de procedimientos y resultados de acuerdo con el problema planteado.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN

Una expresión algebraica es un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones aritméticas. Una expresión algebraica se define como aquella que está constituida por coeficientes, exponentes y bases; ej: $7\,x^4\,y^3$.

2.1 CLASIFICACIÓN

Expresión Algebraica Racional Entera

Son aquellas expresiones donde las variables están afectadas por exponentes enteros naturales. Este tipo de expresiones también son conocidos como polinomios.

Ejemplos:

1) $P(x) = 3x^4 + 7x - 4$
2) $Q(x,y) = 9x^3y - \sqrt{2}xy^2 + 3\sqrt{3}$
3) $Q(m,n,r) = \pi mnr^3 - 13mn^2 - 9r$

Expresión Algebraica Racional Fraccionaria

Son aquellas expresiones algebraicas donde al menos una variable está en el denominador y está presente el exponente entero positivo.

Ejemplos:

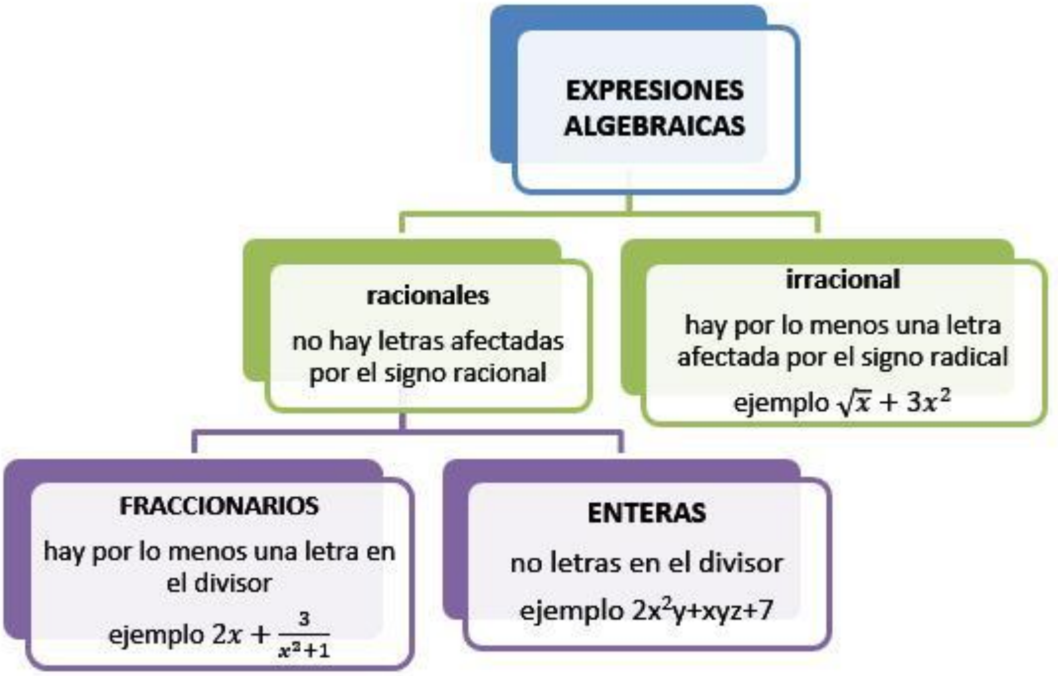
1) $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + 4/x$
2) $Q(x,y) = -7xy - \sqrt{2}/xy^2$
3) $R(x,y,z) = 5/xyz + xyz/(x + y + z)$

Expresiones Algebraicas Irracionales

Son aquellas expresiones algebraicas, en donde se define al menos una radicación que involucre a la(s) variable(s).

Ejemplos:

1) $P(x) = 23\sqrt{x} - x^2 - x + 3$
2) $Q(x) = -8\sqrt{x} - 1/x + 3$
3) $R(x,y) = xy\sqrt{y} + 7/xy - 34$
4) $S(x,y,z) = \sqrt{x} + 7xyz$
5) $T(x,y,z) = 5xyz^2 + 2\sqrt{x}\,y^2 + \sqrt{xz} + 13$



De acuerdo al número de términos, las expresiones algebraicas se pueden clasificar generalmente en monomios y polinomios.

2.2 CARACTERIZACIÓN

MONOMIO:

Un monomio es una expresión algebraica que se compone de un **signo** (positivo o negativo), **números y variables**, que están multiplicados entre sí, y por tanto, forman un producto.

A su vez, las variables pueden estar elevadas a un exponente natural. Ejemplo: $4x$; $-6x^2$.

A la hora de denominar los elementos de un monomio, éstos se dividen en dos partes: el coeficiente y la parte literal.

El coeficiente está formado por el signo y por los números y **la parte literal** por las variables y sus exponentes.

El coeficiente está formado por el signo y por el número, que está multiplicando a la parte literal. Por lo general, se coloca al principio. Si el coeficiente no tiene **ningún signo**, equivale a que su signo **es positivo**, como es el caso de: $2abc^5$.
Si no aparece ningún coeficiente, como por ejemplo: ab^3; significa que en ese caso **el coeficiente es 1** y no se escribe porque ya sabes que multiplicar un valor por 1, no varía su resultado: $1ab^3$.
Por otro lado, el coeficiente **nunca puede ser cero**, ya que la expresión completa tendría como valor 0.

La parte literal la forman las **variables con sus exponentes**, si alguna variable **no tiene exponente**, equivale a que esa variable **está elevada a 1**, como es el caso de: 4xy.
El grado de un monomio es **la suma de todos los exponentes de sus variables**, independientemente de que las variables sean iguales o no.
Para calcular el grado de un monomio se suman los exponentes de todas sus variables. Ejemplo:

$4x^2$ (2° grado)

$5x^3y^2z$ (6° grado)

POLINOMIO:
Un polinomio es la suma algebraica de dos o más monomios. A cada monomio del polinomio se le llama **término**. Ejemplo de polinomio:

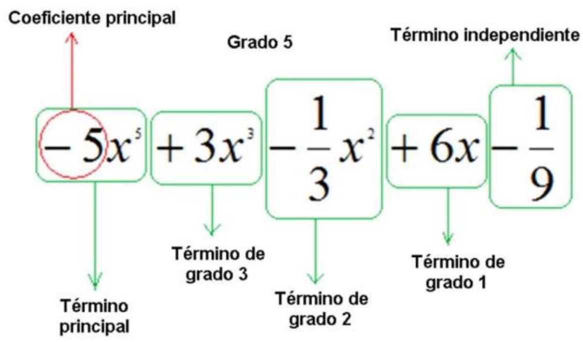
$$\frac{5}{3}x^2yz^3 + \frac{3}{8}x^4y^7 - 7x^2yzt$$

Un polinomio es una expresión de la forma

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Los elementos de los polinomios son:

- Los coeficientes (a_i) con i = 0, 1, 2, ..., n. El que multiplica a la variable elevada al mayor grado se denomina coeficiente principal (a_n), mientras que el que no contiene variable se llama término independiente (a_0).
- La variable x.
- Los exponentes a los que se eleva la variable. En un polinomio, los exponentes NO pueden ser negativos.



Ejemplo	Coeficiente principal	Grado
$3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4$	3	4
$x^8 + 9x^2 + (-2)x$	1	8
$-5x^2 + 1$	-5	2
$7x + 2$	7	1
8	8	0

Cada término del polinomio, se compone de **coeficiente y parte literal**.

Al polinomio de un sólo término se le llama **monomio**, al de dos **binomio**, al de tres **trinomio**… Por otro lado, cuando los polinomios sólo tienen una variable se suelen indicar nombrándolos con la letra P en adelante y encerrando entre paréntesis a la variable que tienen:

$$P(x) = 7x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 5$$

El grado de un polinomio es el **grado de su monomio más alto**.

Un polinomio está ***ordenado*** en forma creciente (decreciente) cuando el grado de cada uno de sus términos va aumentando (disminuyendo) consecutivamente.

Un polinomio ordenado es ***completo*** cuando el grado de sus términos aumenta o disminuye de uno en uno, incluyendo al de grado cero.

El polinomio cuyos coeficientes son todos ceros recibe el nombre de ***polinomio nulo***. El polinomio nulo carece de grado.

Si en un polinomio P (x) se reemplaza la indeterminada por un número real, se obtiene otro número real denominado ***valor numérico*** del polinomio. Por ejemplo:

$$P(x) = 4x^2 - x + 3$$
$$P(1) = 4.1^2 - 1 + 3 = 6$$
$$P(-2) = 4.(-2)^2 - (-2) + 3 = 21$$

También se dice que se ha especializado el polinomio P (x) para x = 1, y para x = –2.
Dos ***polinomios*** son ***iguales*** si y sólo si los coeficientes de los términos de igual grado son respectivamente iguales.

Dos polinomios son ***opuestos*** si tienen opuestos los coeficientes de los términos semejantes. Al opuesto de un polinomio P (x) lo simbolizaremos –P (x).
Por ejemplo, dado:

$$P(x) = -5x^2 + \frac{7}{4}x + 3$$

Su opuesto es:

$$-P(x) = 5x^2 - \frac{7}{4}x - 3$$

2.3 OPERACIONES CON POLINOMIOS DE UNA VARIABLE

Suma y resta de polinomios:

Dos monomios se dicen semejantes cuando tienen la misma variable y el mismo grado. La suma o resta de monomios semejantes produce un nuevo monomio semejante, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los monomios originales.

Análogamente, para sumar o restar polinomios de una misma variable se aplica el siguiente procedimiento:

1. Se ordenan de mayor a menor los términos de ambos polinomios, dejando huecos para los términos ausentes.
2. Se suman o restan los monomios semejantes.

Por ejemplo:

Dados $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 6$ y $Q(x) = 6x^2 + 7$; hallar $P(x) + Q(x)$
Es conveniente ordenar los polinomios de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcrrrr} P(x) & = & 2x^3 + & 5x^2 & -7x & +6 \\ Q(x) & = & & 6x^2 & & +7 \\ \hline P(x) + Q(x) & = & 2x^3 + & 11x^2 & -7x & +13 \end{array}$$

"El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado del polinomio sumando de mayor grado".

Para efectuar la ***resta*** de dos polinomios, se suma al polinomio minuendo el opuesto del polinomio sustraendo. En símbolos: $P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$:

$$\begin{array}{rcrrrr} P(x) & = & 2x^3 + & 5x^2 & -7x & +6 \\ -Q(x) & = & - & 6x^2 & & -7 \\ \hline P(x) - Q(x) & = & 2x^3 - & x^2 & -7x & -1 \end{array}$$

Producto:

a) De un Polinomio por un número real

El producto de un polinomio por un número real se resuelve aplicando la propiedad distributiva:

Sea $P(x) = 11x^2 – 5x + 1$, hallar $6.P(x)$

$6.P(x) = 6 . (11x^2 – 5x + 1) = 66x^2 – 30x + 6$

b) De dos polinomios

Entre dos monomios de una misma variable puede definirse también la operación producto, que resulta en un nuevo monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuyo grado es la suma de los grados de los dos monomios originales.

$$(3x^2).(4x) = 12x^3$$

De esta forma, el producto de dos polinomios se define como la multiplicación de cada uno de los términos (monomios) del primer polinomio por todos los términos del segundo, sumando y agrupando después los términos resultantes.

$$(2x^5 + 3x^2) . (-2x^2 + 2x) = -4x^7 + 4x^6 – 6x^4 + 6x^3$$

También puede aplicarse el siguiente procedimiento:

Ejemplo:

Sea $P(x) = 11x^2 – 5x + 1$ y $Q(x) = 6x + 7$; hallar $P(x) . Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrr}
 & 11x^2 & - 5x & + 1 \\
 & & 6x & + 7 \\
\hline
 & 11x^2 & - 35x & + 7 \\
66x^3 & - 30x^2 & + 6x & \\
\hline
66x^3 & - 19x^2 & - 29x & + 7
\end{array}$$

En la primera fila debajo de la línea, encontramos el producto de $P(x)$ por 7, y en la segunda, el producto de $P(x)$ por $6x$. Notemos que se van encolumnando los términos semejantes. Por último, efectuamos la suma.

"El grado del producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores".

Productos Especiales

• Cuadrado de un binomio: $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

• Cubo de un binomio: $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

• Producto de la suma por la diferencia de dos términos: $(x + a) \cdot (x – a) = x^2 – a^2$

Cociente

Para resolver el cociente de un polinomio por un número real se aplica la propiedad distributiva.

La disposición práctica para efectuar el cociente entre dos polinomios es la que se muestra en el siguiente ejemplo, donde se resuelve el cociente:

La disposición práctica para efectuar el cociente entre dos polinomios es la que se muestra en el siguiente ejemplo, donde se resuelve el cociente:
P(x) : Q(x), siendo P(x): $20x^3 – 23x^2 + 31x – 15$ y Q(x): $5x – 2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
20x^3 & -23x^2 & +31x & -15 & 5x-2 \\ \cline{5-5}
-20x^3 & +8x^2 & & & 4x^2-3x+5 \\ \cline{1-2}
 & -15x^2 & +31x & & \\
 & +15x^2 & -6x & & \\ \cline{2-3}
 & & 25x & -15 & \\
 & & -25x & +10 & \\ \cline{3-4}
 & & & -5 &
\end{array}
$$

El procedimiento a seguir es el siguiente:

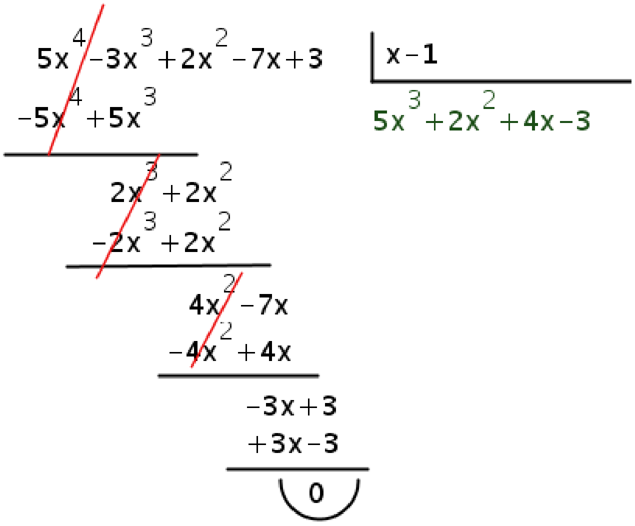
1. El polinomio dividendo debe escribirse ordenado en forma decreciente y completa.
2. Se divide el primer término del polinomio dividendo por el primer término del polinomio divisor.
3. Se multiplica este resultado por el divisor y se resta del polinomio dividendo.
4. Se bajan los términos necesarios y se repite la operación hasta obtener una expresión de grado menor que el del divisor. Esta última expresión recibe el nombre de resto.

"El grado del polinomio cociente es igual a la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el del polinomio divisor".

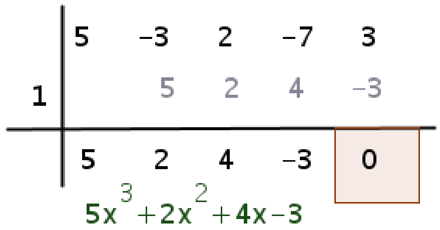
Regla de Ruffini

Para dividir un polinomio P (x) por otro de la forma x – a, se hace uso de una regla práctica conocida como ***regla de Ruffini***.
Esta regla permite calcular los coeficientes del cociente antes mencionado, ejemplo:
Dados P(x): $5x^4 -3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ y Q(x): $x – 1$, hallar P(x) : Q(x).

División clásica de Polinomios



División de Polinomios usando la Regla de Ruffini



Procedimiento:

1. En la primera fila se escriben los coeficientes del polinomio dividendo, ordenados en forma decreciente y completa. (Si falta algún término se completa con cero.)
2. En el ángulo superior izquierdo se escribe a.
3. Se baja el primero de los coeficientes y se multiplica por a. Este resultado se escribe debajo del siguiente y se efectúa la suma.
4. Se continúa el procedimiento hasta el último coeficiente.

Los números obtenidos son los coeficientes del polinomio cociente, y el último es el resto de la división.

Como ya hemos visto, el grado del polinomio cociente es la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el del polinomio divisor, por lo que, al dividir aplicando la Regla de Ruffini, el grado del cociente es una unidad menor que el grado del divisor.

<u>Teorema del Resto</u>

"El resto de la división de P(x) : (x-a), es P(a)".

Demostración: aplicando al ejercicio propuesto en la Regla de Ruffini,

$$P(a) = P(1) = 5.1^4 - 3.1^3 + 2.1^2 - 7.1 + 3$$
$$P(1) = 0$$

El teorema del resto puede servir como verificación, para saber si hemos resuelto correctamente un cociente mediante la regla de Ruffini, pero su aplicación más importante es para averiguar si un polinomio es divisible o no por otro de la forma (x – a), ya que si lo es, el resto de la división será cero y la aplicación del teorema, nos evita el tener que resolver el cociente.

Consecuencia del teorema del resto:

Si P (a) = 0, entonces P (x) es divisible por (x – a)

2.4 CEROS O RAÍCES DE UN POLINOMIO

Diremos que: a ϵ R es ***cero*** o ***raíz*** de P (x) ⇔ P (a) = 0

Ejemplo:
2 es raíz de P(x): 5x – 10, porque P(2) = 5.2 – 10 = 0

El problema de determinar los ceros de un polinomio nos lleva a plantear una ecuación polinómica, es decir P (x) = 0.

Se demuestra que "Todo polinomio de grado n admite n raíces".
Es decir que un polinomio de grado 1 admite una única raíz, uno de segundo grado tiene dos raíces, etc.

Para hallar la raíz de un polinomio de grado 1, se despeja la incógnita realizando operaciones a ambos lados del signo igual:
Las raíces de un polinomio de segundo grado, se hallan mediante la fórmula resolvente:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para hallar las raíces de un polinomio de grado mayor que 2, debe aplicarse el teorema de Gauss, que permite resolver una ecuación de grado superior en el caso de que exista al menos una raíz racional.

2.5 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Un polinomio P (x) es ***primo o irreducible*** si no se puede descomponer en un producto de polinomios de grado positivo, menor que el grado de P.
Por ejemplo, el polinomio 5 x + 4 puede escribirse de muchas maneras diferentes:

$$5\left(x + \frac{4}{5}\right);\ 2\left(\frac{5}{2}x + 2\right);\ldots\ldots$$

Pero todas ellas tienen algo en común: son el producto de un número real por un polinomio de grado 1. Si volvemos a leer la definición de polinomio primo, vemos que el ejemplo la cumple, pues todas las descomposiciones son el producto de un polinomio de grado cero (que no es positivo), por otro de grado 1 (que no es menor que el grado del polinomio dado), por lo tanto, el polinomio propuesto en el ejemplo es primo.

En general: todo polinomio de grado 1 es primo.

Si un polinomio no es primo, se denomina compuesto.

Estudiaremos ahora algunas formas de transformar polinomios compuestos en productos de factores primos, a este proceso lo denominamos factorización o factoreo.

Casos de factoreo

Factor Común

Una expresión algebraica es factor común cuando figura en todos los términos del polinomio, por ejemplo:

$$5x^2 – 15x^3 + 10x^4 = 5x^2 (1 - 3x + 2x^2)$$

Observemos que extraer el factor común es el proceso inverso a efectuar el producto de un monomio por un polinomio.

Factor Común en grupos

En este caso no hay una expresión que sea común a todos los términos, pero el polinomio puede separarse en grupos de términos que tienen un factor común. (Los grupos formados deben tener igual cantidad de términos.)
Ejemplo:

- $2y + 2j + 3xy + 3xj =$
$(2y+2j) + (3xy+3xj) =$
$2(y+j) + 3x(y+j) =$
$(2+3x)\ (y+j)$

Trinomio cuadrado perfecto

Vimos que al desarrollar el cuadrado de un binomio se obtiene un trinomio, que se denomina trinomio cuadrado perfecto.
Para factorear un trinomio cuadrado perfecto procedemos de la siguiente forma:

$$4x^2 + 4x^3 + x^4$$

Primero debemos encontrar dos términos que sean cuadrados perfectos. En nuestro ejemplo:

$$4x^2 = (2x)^2$$
$$4x^4 = (x^2)^2$$

Luego, debemos verificar que el doble producto de las bases es igual al término restante:

$$2.2x.x^2 = 4x^3$$

De acuerdo al signo que tenga este doble producto, el trinomio será el cuadrado de la suma o de la diferencia de las bases, en nuestro caso, es:

$$4x^2 + 4x^3 + x^4 = (2x + x^2)^2$$

Cuatrinomio cubo perfecto

Al desarrollar el cubo de un binomio, se obtiene un cuatrinomio cubo perfecto. El método para factorearlo es similar al caso anterior, supongamos que queremos factorear:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Debemos encontrar dos términos cubos perfectos:

$$x^3 = (x)^3$$
$$8 = (2)^3$$

Después es necesario hacer dos verificaciones:

a) Que el triplo del cuadrado de la primera base por la segunda es uno de los términos restantes:

$$3.x^2.2 = 6x^2$$

b) Y que el triplo de la primera base por el cuadrado de la segunda es el otro término:

$$3.x.2^2 = 12x$$

Por lo tanto, el cuatrinomio queda factoreado como: $(x + 2)^3$

Diferencia de Cuadrados

Vimos que al multiplicar una suma por una diferencia se obtiene la diferencia entre los cuadrados de los términos, entonces, procediendo en forma inversa, una diferencia de cuadrados se factorea como el producto de la suma por la diferencia de las bases.
Ejemplo:

$$16x^6 – 25 = (4x^3)^2 – (5)^2 = (4x^3 – 5).(4x^3 + 5)$$

Suma o diferencia de potencias de igual grado

Previamente, deberemos estudiar cuándo una suma o diferencia de potencias de igual grado ($x^n \pm a^n$), es divisible por la suma o diferencia de sus bases ($x \pm a$).

a) $\dfrac{x^n + a^n}{x + a} =$

Si aplicamos el teorema del resto: $R = (-a)^n + a^n$, puede resultar que:
n sea par, entonces $R = 2a^n \neq 0$
n sea impar, entonces $R = 0$

Conclusión: La suma de potencias de igual grado es divisible por la suma de las bases si el exponente es impar.

b) $\dfrac{x^n + a^n}{x - a} =$

Por el teorema del Resto, $R = a^n + a^n = 2a^n \neq 0$ sea n par o impar.

Conclusión: La suma de potencias de igual grado nunca es divisible por la diferencia de las bases.

c) $\frac{x^n - a^n}{x + a} =$

Por el teorema del Resto, $R = (-a)^n - a^n$, puede resultar que:
n sea par, entonces $R = 0$
n sea impar, entonces $R = -2ª^n \neq 0$

Conclusión: La diferencia de potencias de igual grado es divisible por la suma de las bases si el exponente es par.

d) $\frac{x^n - a^n}{x - a} =$

Por el teorema del Resto, $R = a^n - a^n = 0$, sea n par o impar.

Conclusión: La diferencia de potencias de igual grado siempre es divisible por la diferencia de las bases.

Esto se puede resumir en:

EJEMPLO	EXPONENTE	SIGNO	DIVISOR
$x^3 - a^3$	impar	Menos	$(x - a)$
$x^3 + a^3$	impar	Mas	$(x + a)$
$x^4 - a^4$	Par	Menos	$(x - a)$ y $(x + a)$
$x^4 + a^4$	par	Mas	No se puede factorear

Regla práctica:

Observemos que el factoreo de una suma o diferencia de potencias de igual grado siempre es igual al producto de la suma o resta de las bases por un polinomio C(x). Daremos algunas reglas que nos permitirán formar dicho polinomio sin tener que efectuar el cociente:

a) Si C(x) multiplica a la suma de las bases, los signos de sus términos son alternados, en cambio si multiplica a la diferencia de las bases, sus términos son todos positivos.
b) El grado de C(x) es n–1.
c) C(x) tiene como primer término el producto de la primer base elevada a la n–1 por la segunda con exponente cero, el segundo término es el producto de la primer base elevada a la n–2 por la segunda elevada al exponente 1, y así se forman los demás términos (los exponentes de la primer base decrecen desde n–1 hasta 0, y los de la segunda crecen desde 0 hasta n–1.

Factorización de un polinomio en función de sus raíces

El polinomio P(x), de grado n, tendrá n raíces:

$$P(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Raíces: $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$.

Y podrá escribirse:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_n)$$

2.6 DIVISOR COMÚN DE MAYOR GRADO (d.c.m.gr)

Para calcular el divisor común de mayor grado de dos o más polinomios, se factorea cada uno de ellos y se halla el producto de los factores comunes, tomados cada uno con su menor exponente.

Ejemplo: Hallar el d.c.m.gr de P(x): $x^2 - 9$ y Q(x): $2x - 6$

Factoreando cada uno de ellos: $P(x) = (x + 3).(x - 3)$ y $Q(x) = 2(x - 3)$

d.c.m.gr: $(x - 3)$

2.7 MÚLTIPLO COMÚN DE MENOR GRADO (m.c.m.gr)

Para calcular el múltiplo común de menor grado de dos o más polinomios, se factorea cada uno de ellos y se halla el producto de los factores primos comunes o no comunes tomados cada uno de ellos con su mayor exponente.

En el ejemplo anterior, el m.c.m.gr: $2.(x - 3)(x + 3)$

2.8 EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Las expresiones algebraicas fraccionarias tienen la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, por ejemplo:

P(x): $3x^4 + 5$ y Q(x): $x^2 - x + 3$

$$\frac{3x^4 + 5}{x^2 - x + 3}$$

Simplificación de expresiones algebraicas racionales

Si se dividen numerador y denominador de una expresión algebraica racional fraccionaria por un mismo polinomio, se obtiene una expresión racional equivalente (no igual) a la dada. Para ello, se factorean ambos y se eliminan los factores comunes:

$$\frac{4x^2 + 16x + 16}{2x^2 - 8} = \frac{4(x^2 + 4x + 4)}{2\,(x^2 - 4)} = \frac{2^{\cancel{2}}(x + 2)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{(x + 2)}(x - 2)}$$

$$\frac{2(x + 2)}{(x - 2)}$$

2.9 OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Ahora veremos las operaciones que se pueden realizar con las expresiones algebraicas fraccionarias, comenzando por la ***suma algebraica***. Al igual que lo que sucede con las fracciones, las expresiones algebraicas fraccionarias pueden ser de igual o distinto denominador. En el primero de los casos, se obtiene otra expresión fraccionaria de igual denominador, cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores de las expresiones sumandos, y en el segundo es necesario calcular el común denominador, que es el múltiplo común de menor grado de los denominadores de las expresiones dadas.

$$\frac{3x}{4x+12} - \frac{4+x}{x^2+6x+9} = \frac{3x}{4(x+3)} - \frac{4+x}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{3x\,(x+3)}{4(x+3)^2} - \frac{4(4+x)}{4(x+3)^2} = \frac{3x^2+9x}{4(x+3)^2} - \frac{16+4x}{4(x+3)^2} =$$

$$= \frac{3x^2+9x-16-4x}{4(x+3)^2} = \frac{3x^2+5x-16}{4(x+3)^2}$$

Para ***multiplicar*** expresiones algebraicas racionales, se multiplican los numeradores y denominadores entre sí, previa simplificación.
El ***cociente*** se resuelve de igual forma que en las fracciones numéricas: se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor:

$$\frac{x^3-x}{3x-6} : \frac{5x+5}{2x-4} = \frac{x\left(x^2-1\right)}{3(x-2)} \cdot \frac{2(x-2)}{5(x+1)} =$$

$$= \frac{2x(x+1)(x-1)}{15(x+1)} = \frac{2x(x-1)}{15}$$

Ejercitación:

1) Diga si las siguientes expresiones algebraicas son polinomios o no. En caso afirmativo, señala cuál es su grado y término independiente.

a) $x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 5$

b) $\sqrt{x} + 7X^2 + 2$

c) $1 - x^4$

d) $x^3 + x^5 + x^2$

e) $x - 2x^{-3} + 8$

2) Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^2 - 1$

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$
$R(x) = 6x^2 + x + 1$
$S(x) = 1/2x^2 + 4$
$T(x) = 3/2x^2 + 5$
$U(x) = x^2 + 2$

Calcular:

- **a)** $P(x) + Q(x) =$
- **b)** $P(x) - U(x) =$
- **c)** $P(x) + R(x) =$
- **d)** $2P(x) - R(x) =$
- **e)** $S(x) + T(x) + U(x) =$
- **f)** $S(x) - T(x) + U(x) =$

3) Dados los polinomios:

$P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$
$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$
$R(x) = 2x^4 - 2x - 2$
Calcular:

- **a)** $P(x) + Q(x) - R(x)$
- **b)** $P(x) + 2\,Q(x) - R(x)$
- **c)** $3Q(x) + R(x) - P(x)$

4) Multiplicar:

- **a)** $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3)$
- **b)** $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2)$
- **c)** $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)$

5) Dividir:

- **a)** $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$
- **b)** $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3)$
- **c)** $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $\qquad Q(x) = x^2 - 2x + 1$

6) Divide por Ruffini:

- **a)** $(x^3 + 2x + 70) : (x + 4)$
- **b)** $(x^5 - 32) : (x - 2)$
- **c)** $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

7) Sin efectuar las divisiones, halla el resto de las siguientes divisiones:

- **a)** $(x^5 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$
- **b)** $(2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10) : (x + 2)$
- **c)** $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$
- **d)**

8) Indica cuáles de estas divisiones son exactas:

- **a)** $(x^3 - 5x - 1) : (x - 3)$
- **b)** $(x^6 - 1) : (x + 1)$
- **c)** $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$
- **d)** $(x^{10} - 1024) : (x + 2)$

9) Comprueba que los siguientes polinomios tienen como factores los que se indican:

a) $(x^3 - 5x - 1)$ tiene por factor $(x - 3)$
b) $(x^6 - 1)$ tiene por factor $(x + 1)$
c) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ tiene por factor $(x - 1)$
d) $(x^{10} - 10^{24})$ tiene por factor $(x + 2)$

10) Hallar a y b para que el polinomio $x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.
11) Determina los coeficientes de a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.
12) Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé de resto 4.
13) Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces.
14) Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x= 5$.
15) Calcular el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.
16) Simplificar las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} =$

b) $\dfrac{x^2 - 3x}{3 - x} =$

c) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} =$

d) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} =$

e) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} =$

f) $\dfrac{x^3 - 19x - 30}{x^3 - 3x^2 - 10x} =$

17) Suma las fracciones algebraicas:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} =$$

18) Resta las fracciones algebraicas:

$$\frac{x+2}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} =$$

19) Multiplica las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$

b) $\dfrac{9 - 6x + x^2}{9 - x^2} \cdot \dfrac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} =$

20) Divide las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+4} : \dfrac{x^2-4}{x^3+8} =$

b) $\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+2x-3} : \dfrac{4x-2x^2}{x^3-2x^2+x} =$

21) Opera:

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(x-\frac{x}{x-1}\right)=$$

22) Efectúa:

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)=$$

23) Realiza:

$$\frac{x}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=$$