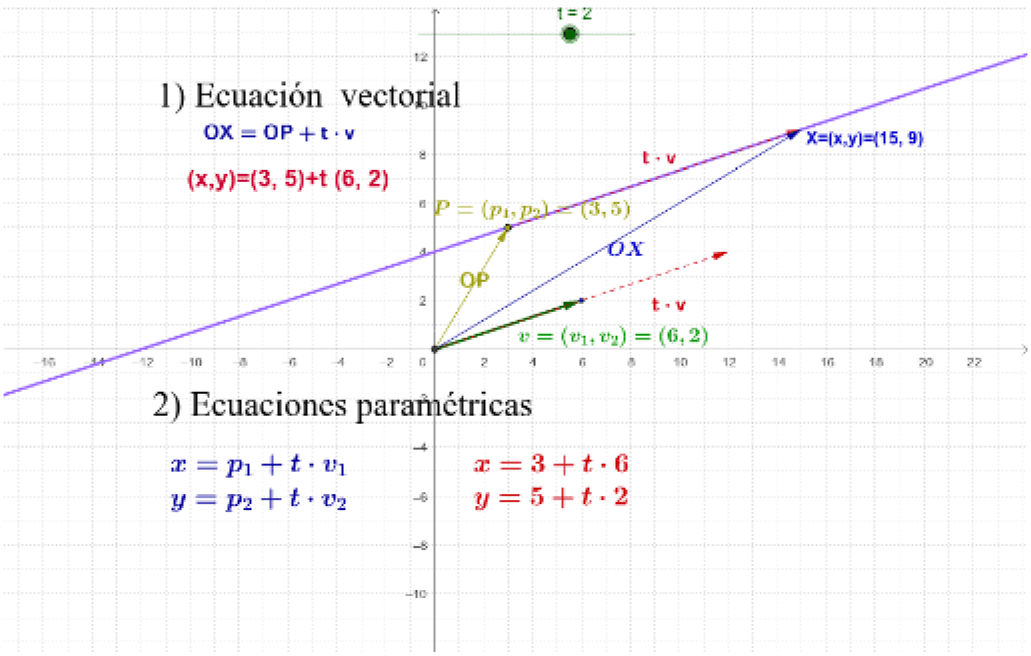
ECUACIONES Y DESIGUALDADES

3



Objetivos:

- Utilización de las nociones de dependencia y variabilidad como herramientas para modelizar fenómenos de cambio que representen variaciones lineales y cuadráticas.
- Uso de diferentes representaciones de una función (coloquial, gráfica, algebraica, por tablas, etc.) para establecer las relaciones de dependencia entre las variables.
- Análisis de comportamiento de las funciones lineales (polinómicas de primer grado) y Cuadráticas (polinómicas de segundo grado) desde sus representaciones en gráficos y fórmulas.
- Análisis de comportamiento de las funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas desde sus representaciones en gráficos y fórmulas (incluyendo interpretación y variación de parámetros).
- Selección de la función más adecuada como modelo matemático para interpretar problemas de la realidad y comparación del modelo elegido de acuerdo con la necesidad que impone el problema.

ECUACIONES Y DESIGUALDADES

3.1. CONCEPTO DE ECUACIÓN

Una *igualdad* es una relación de equivalencia entre dos expresiones, numéricas o literales, que se cumple para algún, algunos o todos los valores y se representa por el signo =. Cada una de las expresiones recibe el nombre de *miembro*. Se llama primer miembro a lo que está a la izquierda del signo igual y segundo miembro a lo que está a su derecha.

expresión a = expresión b

Las igualdades pueden ser *numéricas* (establecen relaciones entre números) o *algebraicas* (si contienen letras). Pueden ser *ciertas* (si se cumplen) o *falsas* (si no siempre se cumplen).

Ejemplos:

1) La igualdad $10 = 8 + 2$ es numérica y cierta

2) La igualdad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ es algebraica y cierta para cualesquiera valores de a y b.

3) La igualdad $3x - 14 = x$ es algebraica y cierta para $x = 7$, pero es falsa para cualquier otro valor de x .

Por lo tanto, las igualdades pueden ser de dos tipos:

· ***Identidades***: son igualdades que se verifican siempre, ya sean numéricas o algebraicas.

· ***Ecuaciones***: son igualdades que se verifican para algunos valores determinados y desconocidos de las letras, llamadas *incógnitas*.

Resolver una ecuación es hallar el conjunto solución. Se conocen como raíces o soluciones de la ecuación a los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.
Ejemplo.
Las ecuaciones $2x - 3 = 5$ y $2x = 8$ son equivalentes porque su solución es $x = 4$

Para resolver una ecuación, se transforma ésta en una ecuación equivalente con la variable despejada.

Propiedades

a. Si se suma una misma cantidad a cada lado de la ecuación dada, la igualdad no se altera.

b. Si se resta una misma cantidad a cada miembro de la ecuación dada, la igualdad no se altera.

c. Si se multiplica o se divide a ambos lados de la ecuación por cualquier cantidad diferente de cero, la igualdad no se altera.

3.2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación de primer grado es una ecuación en la cual, después de simplificarla o reducir sus términos semejantes, el máximo exponente de la incógnita es uno.
En términos generales, una ecuación de primer grado con una variable es de la forma:

$$ax + b = 0$$

donde a y b son coeficientes numéricos, $a \neq 0$ y x es la incógnita.

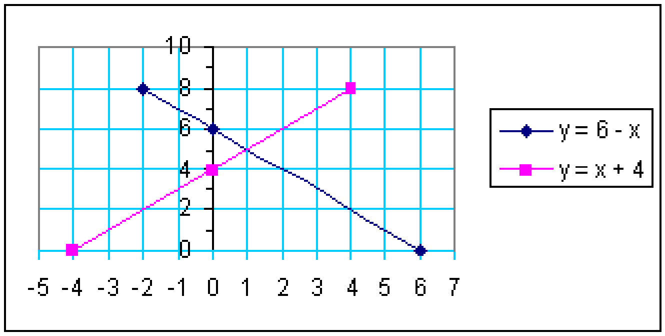
La solución de una ecuación de primer grado en su forma general está dada por:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Para resolver una ecuación de este tipo, se deben transponer los términos, esto es traspasarlos de un lado a otro de la ecuación de manera que todos los términos que tengan la incógnita queden en el primer miembro y los términos independientes en el otro. Para fines prácticos, cada vez que se transpone un término de un miembro a otro, éste cambia de signo, se reducen términos semejantes y finalmente, para despejar la incógnita se divide por su coeficiente.

Gráfica

Resolver una ecuación es encontrar un valor de x que, al ser sustituido en la ecuación y realizar las operaciones indicadas, se llegue a que la igualdad es cierta. Para ello se debe dejar sola a la variable x de un lado de la ecuación. A esto se le llama *despejar* a la variable.
Gráficamente, la solución de la ecuación está representada por una línea recta vertical en el plano cartesiano. La solución es el valor de la abscisa del punto en el que esa recta corta al eje *x.*



3.3. DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO

La expresión $a \neq b$ significa que " a " no es igual a " b".

Según los valores particulares de a y de b, puede tenerse $a > b$, que se lee "*a* mayor que", cuando la diferencia $a - b$ es positiva y $a < b$ que se lee "*a* menor que *b*", cuando la diferencia $a - b$ es negativa.

La notación $a \geq b$, que se lee "*a* es mayor o igual que *b*", significa que $a > b$ o que $a = b$ pero no ambos. Por su parte, la notación $a \leq b$ que se lee "*a* es menor o igual que *b*", significa que $a < b$ o que $a = b$ pero no ambos.

Una *desigualdad* se obtiene al escribir dos expresiones numéricas o algebraicas relacionadas con alguno de los símbolos $>$, $<$, $\geq$ o $\leq$.

Lo mismo que en las igualdades, en toda desigualdad, los términos que están a la izquierda del signo mayor o menor, forman el primer miembro de la desigualdad, y los términos de la derecha, forman el segundo miembro.

De la definición de desigualdad, se deduce que:

- ✓ Todo número positivo es mayor que cero.
- ✓ Todo número negativo es menor que cero.
- ✓ Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- ✓ Si $a > b$ entonces $b < a$.

Los signos $>$ o $<$ determinan dos sentidos opuestos en las desigualdades, dependiendo si el primer miembro es mayor o menor que el segundo. Se dice que una desigualdad cambia de sentido, cuando el miembro mayor se convierte en menor o viceversa.

Existen dos clases de desigualdades: las absolutas y las condicionales.

- ✓ Desigualdad *absoluta* es aquella que se verifica para cualquier valor que se atribuya a las literales que figuran en ella. Por ejemplo: $x2 +1 > x$.

- ✓ Desigualdad *condicional* es aquella que sólo se verifica para ciertos valores de las literales. Por ejemplo: $3x - 15 > 0$ que solamente satisface para $x > 5$. En este caso se dice que 5 es el límite de x.

Las desigualdades condicionales se llaman *inecuaciones*.

Propiedades

Sean *a, b, c* tres números reales.

a. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se añade o se resta un mismo número a cada miembro

Esto es, si $a > b$, entonces se cumple que $a + c > b + c$.

b. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor positivo, o se dividen por un mismo divisor, también positivo.

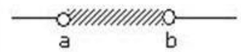
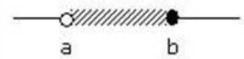
Esto es, dado un número $c > 0$, si $a > b$ entonces se cumple que $a \times c > b \times c$ y que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

c. Una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor negativo, o se dividen por un mismo divisor, también negativo.

Esto es, dado un número $c < 0$, si $a > b$ entonces se cumple que $a \cdot c < b \cdot c$ y que $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Gráfica

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de valores de x que cumplan la desigualdad. Gráficamente, la solución de una inecuación de primer grado está representada por un intervalo del eje de las abscisas a partir de un valor límite a. Si la solución es de la forma $x > a$, entonces la región será todos los números que estén a la derecha de a sin incluirlo. Si la solución es de la forma $x \geq a$, la región incluye al valor a. De la misma forma, si la solución es de la forma $x < a$, entonces la región será todos los números que estén a la izquierda de a sin incluirlo. Si la solución es de la forma $x \leq a$, la región incluye al valor a. Dependiendo del tipo de desigualdad el conjunto solución puede ser uno o dos intervalos, la totalidad de los números reales o el conjunto vacío.

INTERVALO	GRÁFICO	SIGNIFICADO Y NOMENCLATURA
ABIERTO		$a < x < b$] a , b [
ABIERTO POR LA IZQUIERDA		$a < x \leq b$] a , b]
ABIERTO POR LA DERECHA		$a \leq x < b$ [a , b [
CERRADO		$a \leq x \leq b$ [a , b]
INFINITO POR LA IZQUIERDA Y ABIERTO		$x < a$] -∞, a [
INFINITO POR LA DERECHA Y ABIERTO		$x > a$] a , +∞ [
INFINITO POR LA IZQUIERDA Y CERRADO		$x \leq a$] -∞, a]
INFINITO POR LA DERECHA Y CERRADO		$x \geq a$ [a , +∞ [

3.4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado, en el cual se relacionan dos o más incógnitas.

$$2x + 3y = 2$$

$$2x - 2y = 12$$

En los sistemas de ecuaciones, se debe buscar los valores de las incógnitas, con los cuales al reemplazar, deben dar la solución planteada en ambas ecuaciones.
A cada una de las ecuaciones se les denomina también restricciones o condiciones.
Las incógnitas establecidas en un sistema representan el punto donde se intersectan las rectas en un plano cartesiano (x,y).

Métodos de resolución algebraica de sistemas de ecuaciones

a. Reducción
Consiste en **igualar** los coeficientes de una misma incógnita en ambas ecuaciones y, enseguida, **sumar** o **restar** las ecuaciones, de modo que se eliminen los términos cuyos coeficientes se igualaron.

Ejemplo:

$$3x - 2y = 7$$
$$2x + y = 14$$

En primer lugar se iguala una de las incógnitas del sistema. En este caso, se empieza igualando la incógnita **y**. Para ello, se multiplica la segunda ecuación por 2, quedando **4x+2y= 28**

$$3x - 2y = 7$$
$$4x + 2y = 28$$

Ahora, se suma o resta (según se requiera) los términos semejantes, para reducir (eliminar) el término con coeficiente común.

$$\begin{array}{c} 3x - 2y = 7 \\ 4x + 2y = 28 \\ \hline 7x + 0y = 35 \end{array}$$

Luego, se resuelve la ecuación, quedando así x=5, ya que:

$$7x = 35$$
$$x = 35/7$$
$$x = 5$$

Ya se conoce el valor de una de las incógnitas. Para identificar el otro valor, se debe reemplazar en una de las ecuaciones el valor que se obtuvo de **x**. en este caso:

$$3x - 2y = 7$$
$$3.5 - 2y = 7$$
$$-2y = 7 - 15$$
$$y = -8/-2$$
$$y = 4$$

Por lo tanto la solución al sistema de ecuaciones es → S: **(5, 4)**

b. Sustitución

Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en otra ecuación.
Ejemplo:

$$10x + 15y = 410$$
$$x + y = 34$$

Primero, se despeja cualquiera de las incógnitas de esta ecuación. Por ejemplo se escoge despejar x en la segunda ecuación. Para ello, se mueven todos los términos que no sean x hacia el otro lado de la igualdad.

$$y = 34 – x$$

Conociendo el valor de x, se sustituye en la **otra ecuación**:

$$10x + 15(34 – x) = 410$$
$$10x + 510 – 15x = 410$$
$$510 – 410 = 5\ x$$
$$100 : 5 = x$$
$$x = 20$$

Una vez que se conoce el valor de la otra incógnita (en este caso, y), se sustituye en la ecuación:

$$y = 34 – x$$
$$y = 34 – 20$$
$$y = 14$$

Solución: (20,14)

c. Igualación
Consiste en despejar la misma variable de ambas ecuaciones del sistema. Una vez despejada, se igualan los resultados, despejando la única variable que queda.

$$2x + \ \ y = 50$$
$$4x – 5y = 30$$

Se debe despejar cualquiera de las incógnitas de la ecuación. En este caso, se opta por despejar y.

$$y = 50 – 2x$$
$$y = (30 – 4x) : (-5)$$

Se igualan las expresiones obtenidas: y = y

$$(-5).(50 – 2x) = 30 - 4x$$
$$10x - 250 = 30 - 4x$$

Ahora, se resuelve la ecuación resultante, que tiene una incógnita:

$$14x = 280$$
$$x = 280 : 14$$
$$x = 20$$

Una vez identificado el valor de "x", se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$2x + y = 50$$
$$y = 50 - 2.20$$
$$y = 50 - 40$$
$$y = 10$$

Solución: (20,10)

<u>Tipos de sistemas</u>

Existen 3 tipos de sistemas de ecuaciones: Los **sistemas equivalentes**, los **sistemas sin solución o incompatibles**, y los **sistemas con infinitas soluciones o compatible indeterminado**.

a. Sistemas equivalentes

Son aquellos que se caracterizan por tener una única solución a partir de dos incógnitas. En el plano cartesiano, se representan al formarse rectas secantes (solo un punto en la recta).
Por ejemplo:

$$3x - y = 1$$
$$2x + y = 9$$

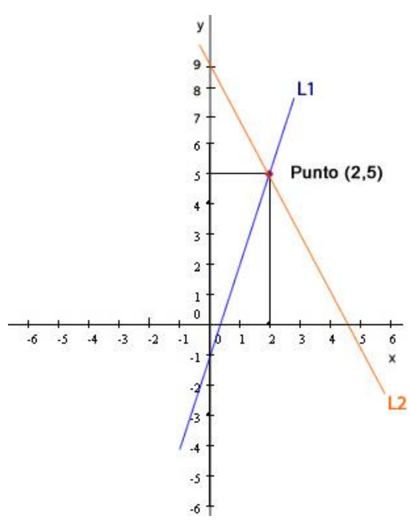
Realizando las operaciones de suma y resta, se obtiene:

$$5x = 10$$
$$x = 2$$

Remplazando:

$$3.2 - y = 1$$
$$6 - 1 = y$$
$$y = 5$$

S (2,5)

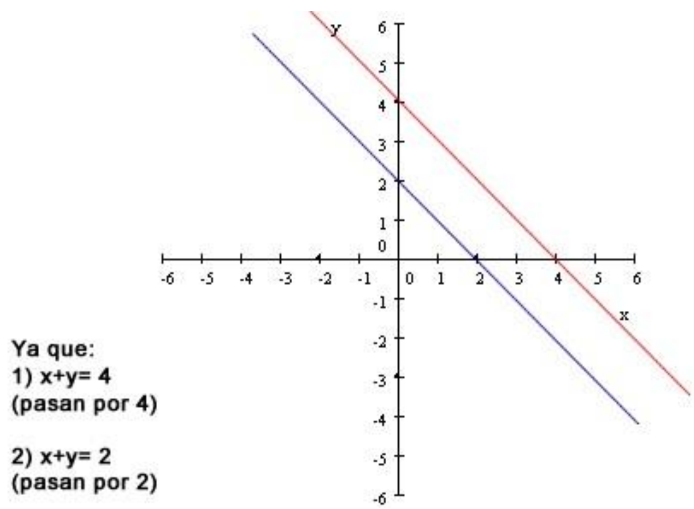


b. Sistema incompatible:

Son aquellos sistemas en donde no hay ninguna solución posible. En el plano cartesiano, se representan con rectas paralelas (ningún punto).
Ejemplo:

$$x + y = 4$$
$$x + y = 2$$

En el ejemplo anterior, se puede observar que dos ecuaciones iguales dan como resultado un número distinto. Esto quiere decir que las ecuaciones no tienen resultados en común, ya que si los tuviese, el resultado de ambas ecuaciones sería el mismo.
En el plano cartesiano, las ecuaciones se representan de una forma independiente. Se obtienen dos rectas paralelas (no se intersecan). Por lo tanto, el sistema **no tiene solución**.



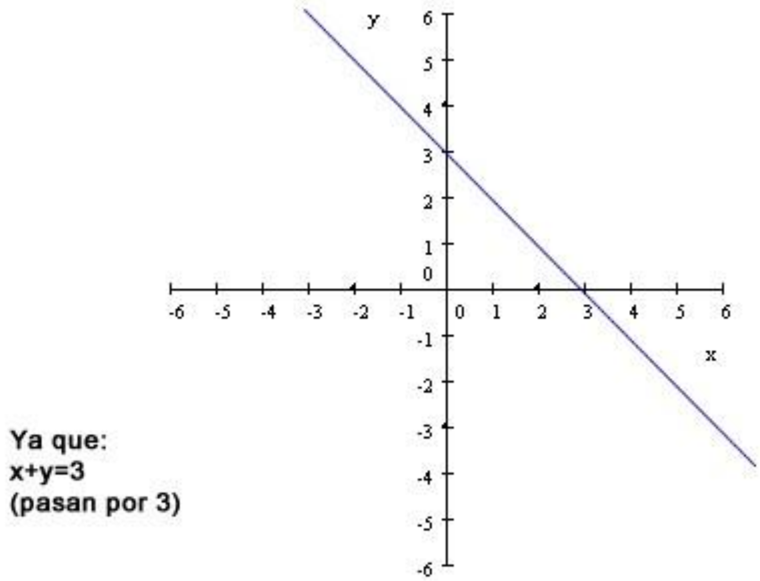
c. Sistema compatible indeterminado:

Son aquellos sistemas en donde existen **infinitas soluciones**. En el plano cartesiano, se representa con rectas coincidentes (infinitos puntos).
Ejemplo:

$$2x + 2y = 6$$
$$x + y = 3$$

En este caso, se puede observar que las ecuaciones de este sistema son exactamente iguales, ya que $2x + 2y=6$ es lo mismo que $x + y=3$, pero amplificado por 2. Esto quiere decir, que cualquier punto de la recta es la solución del sistema.

Por lo tanto:



¿Cómo identificar cada sistema?

Identificar un sistema es muy sencillo. Para hacerlo, se debe tener en cuenta las siguientes consideraciones:

$$ax - by = c$$
$$dx + ey = f$$

Si la multiplicación entre a y e, y la multiplicación entre b y d dan valores **distintos**, significa que el sistema es **equivalente**.

Si la multiplicación entre a y e, y la multiplicación entre b y d dan valores **iguales**, significa que el sistema o es **incompatible**, o **es un sistema compatible indeterminado**. Para identificarlo, se debe tener en cuenta las siguientes consideraciones:

a) Si la multiplicación entre **b** y **f**, y la multiplicación entre **c** y **e** dan valores **distintos**, significa que el sistema es **incompatible**.

b) Si la multiplicación entre **b** y **f**, y la multiplicación entre **c** y **e** dan valores **iguales,** significa que el sistema es **compatible indeterminado.**

<u>Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones</u>

Para resolver problemas en los que se plantee un sistema de ecuaciones, se debe seguir estos pasos:

1. Leer atentamente el enunciado, e identificar las incógnitas.
2. Traducir el enunciado en varias ecuaciones.
3. Resolver el sistema e interpretar la solución.

Ejemplo:

La suma de la edad de dos niños es 4 años. Si la edad del primero sumada al triple de la edad del segundo es 10 años. ¿Qué edad tiene cada niño?

Pasos:

1. Leer atentamente el enunciado, e identificar las incógnitas.→ ***Números pedidos, x e y***.
2. Traducir el enunciado en varias ecuaciones.

La suma de la edad de dos niños es 4 años → $x + y = 4$

la edad del primero sumada al triple de la edad del segundo es 10 años → $x + 3y = 10$

3. Resolver el sistema e interpretar la solución.

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + 3y &= 10 \end{aligned}$$

Se utiliza el método de reducción

Respuesta: Las edades son: 1 y 3 años

3.5. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

Sistema de inecuaciones lineales con una incógnita

Un sistema de inecuaciones lineales o de primer grado es un conjunto de dos o más inecuaciones lineales.

Para resolver cualquier sistema de inecuaciones lineales, hay que **resolver cada inecuación por separado**. Las **soluciones** de estos sistemas serán todos los números reales que satisfacen todas y cada una de las inecuaciones del sistema, es decir, corresponde a la intersección **de todas las inecuaciones** que forman parte del sistema.

Pueden haber sistemas de inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Aquí, se verán los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

Ejemplo 1:

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{gathered} 5x - 10 > 3x - 2 \\ 3x + 1 < 2x + 6 \end{gathered}$$

Para encontrar la solución se debe resolver ambas inecuaciones por separado ocupando las propiedades de las desigualdades, recordar que siempre la operación se realiza a ambos lados de la desigualdad.

Se resuelve la primera inecuación, recordar que la operación se realiza a los dos lados de la desigualdad:

$$\begin{gathered} 5x - 10 + 10 > 3x - 2 + 10 \\ 5x > 3x + 8 \end{gathered}$$

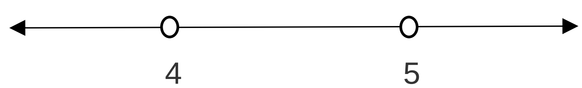
$$5x - 3x > 3x + 8 - 3x$$
$$2x > 8$$
$$2x : 2 > 8 : 2$$
$$X > 4$$

Se resuelve la segunda inecuación:

$$3x + 1 < 2x + 6$$
$$3x < 2x + 5$$
$$X < 5$$

Por lo tanto, la solución del sistema será $S = S_1 \cap S_{2,}$ los cuales serán todos los valores que a la vez sean mayores que 4 y menores que 5. Se puede expresar la solución de las siguientes maneras:

$$S = \{ x \in R \ / \ 4 < x > 5\}$$
$$S =]\ 4,5\ [$$



Ejemplo 2:

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$3x + 4 \geq 16$$
$$-6 - x > -8$$

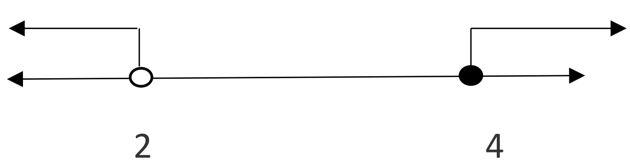
Al resolver la primera:

$$3x \geq 12$$
$$x \geq 4$$

La segunda inecuación:

$$-x > -2$$
$$x < 2$$

Si se representa gráficamente las soluciones de las dos inecuaciones del sistema se podrá ver:



El conjunto de solución de este sistema de inecuaciones es igual al conjunto vacío es decir, ningún valor de x satisface a ambas inecuaciones a la vez.

$S_1 \cap S_2 = ?$.

En este caso se dice que el **sistema no tiene solución**.
Nota: La solución de un sistema de inecuaciones puede ser, el conjunto vacío (?), un intervalo de números reales, o un conjunto con infinitos elementos.

Problemas que involucran sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Cuando haya que resolver problemas que involucran sistemas de inecuaciones lineales se puede seguir los siguientes pasos para poder resolverlos:

a. Nombrar al término desconocido con una incógnita.

b. Establecer una relación entre los datos conocidos y desconocidos, planteando las inecuaciones que sean necesarias.

c. Aplicando las propiedades de las desigualdades resolver las inecuaciones por separado.

d. Recordar que la solución de un sistema de inecuaciones lineales corresponde a la intersección ($S_1 \cap S_2$) de las soluciones y que debe estar en el mismo contexto que el problema planteado.

Ejemplo 1:
Un profesor necesita saber el mayor número de alumnos que hay en la sala del 4° B, si al doble del número de éstos se disminuye en 7, el resultado es mayor que 29, y si al triple se disminuye en 5, el resultado es menor que el doble del número aumentado en 16.

Para resolver este problema, se aplican los pasos aprendidos:

a. Si se lee cuidadosamente el problema, se observa que la incógnita en este caso es el número de alumnos que hay en la sala del 4° B. La cual se llama **x**.

b. Una vez que ya se definió la incógnita, se puede plantear las inecuaciones:

$$2x - 7 > 29$$
$$3x - 5 < 2x + 16$$

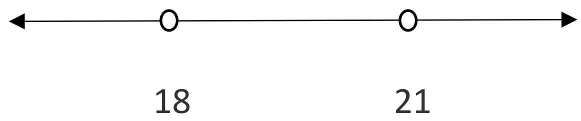
c. Se resuelve el sistema de inecuaciones:
Primera inecuación:

$$2x > 36$$
$$x > 18$$

Segunda inecuación:

$$x < 21$$

d. Se grafica la solución $\mathbf{S_1 \cap S_2}$;



Se puede ver que el número de alumnos será mayor que 18 y menor que 21. Por lo tanto, el intervalo no incluye los números 18 y 21. Además, si se analiza el contexto del problema, se observa que cuando se habla de cantidad de personas, se refiere a números naturales. Entonces, la respuesta es:

Respuesta: el mayor número de alumnos que hay en la sala del 4° B es 20.

<u>3.6. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO</u>

Una ecuación de segundo grado en una variable es aquella que, una vez realizadas todas las reducciones posibles, el máximo exponente es dos.
Una ecuación de este tipo también es llamada *ecuación cuadrática* y tiene la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a \neq 0$, b y c son números reales; y x es la incógnita. El monomio ax^2 recibe el nombre de *término cuadrático*, bx se conoce como *término lineal* y c es el *término independiente*.

Una ecuación de segundo grado tiene siempre dos respuestas (algunas veces repetidas). El objetivo de resolverla es obtener las *raíces* x_1 *y* x_2, si existen, para los que la igualdad de la ecuación es cierta.

Una ecuación cuadrática puede ser de dos tipos:

Ecuación *completa* si $b \neq 0$ y $c \neq 0$
Ecuación *incompleta* si $b = 0$ ó $c = 0$.

En la vida práctica, cuando se tiene que resolver una ecuación cuadrática que surge de un problema concreto, la mayoría de las veces ésta no tiene un formato sencillo, sin embargo, puede reducirse a alguna de estas formas para decidir el método que se usará para resolverla.

Para resolver la ecuación de segundo grado en el caso general, expresión conocida como *fórmula general* para resolver una ecuación de segundo grado o *resolvente.*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En la fórmula general, la cantidad: $b^2 - 4ac$ es llamada *discriminante* de la ecuación y determina la naturaleza de las raíces, de acuerdo a lo siguiente:

- ✓ Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son reales y diferentes.
- ✓ Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales e iguales.
- ✓ Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son complejas conjugadas.

Gráfica

Para graficar una ecuación de segundo grado, se establece la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. La solución de $ax^2 + bx + c = 0$ son los valores x que hacen $0 = y$, donde la curva $y = ax^2 + bx + c$ cruza el eje x.

El resultado gráfico siempre es una curva que recibe el nombre de *parábola*, cuyas características son:

1. Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.

2. Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

3. La intersección con el eje y es el punto $(0, c)$

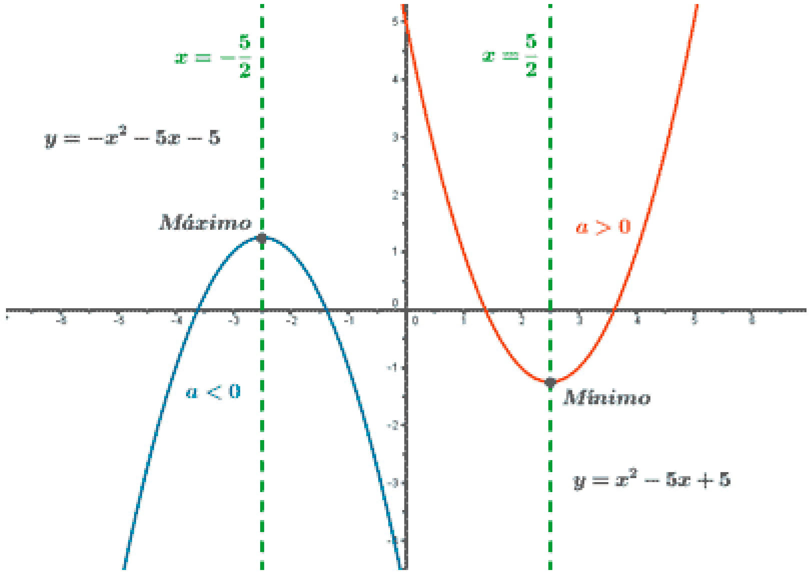
4. Como las soluciones dependen del signo del discriminante $\Delta = b2 - 4ac$, se tiene que:

   - ✓ Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene soluciones reales y distintas, por lo tanto la parábola corta en dos puntos al eje x.
   - ✓ Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene soluciones reales iguales, por lo tanto la parábola es tangente al eje x.
   - ✓ Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales, por lo tanto la parábola no corta el eje x.

La ecuación $y = ax2 + bx + c$ puede evaluarse para todo $x \in \mathbf{R}$ y por ello se unen los puntos obtenidos para obtener sus gráficas.

Para fines prácticos, tabulando valores diferentes de x se pueden obtener los valores de y, generando puntos de coordenadas (x, y) que se localizan en el plano coordenado y que al unirse conforman la parábola.

Si las coordenadas de los puntos son grandes puede ser necesario modificar la escala en los ejes x e y, lo que provoca que las gráficas se deformen. Esto significa que su aspecto es diferente al que realmente tienen.



3.7. DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO

Una desigualdad de segundo grado o desigualdad cuadrática, tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \;\text{ o }\; ax^2 + bx + c \geq 0 \;\text{ o }\; ax^2 + bx + c < 0 \;\text{ o }\; ax^2 + bx + c \leq 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales y *a* ¹ 0 . Su solución generalmente representa un intervalo o la unión de dos intervalos de números reales.

Para resolver una desigualdad cuadrática se usan los conceptos de *número crítico* y *número de prueba*.

Un número crítico de la desigualdad mencionada es una raíz real de la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si r_1 y r_2 son números críticos y $r_1 < r_2$, entonces el polinomio $ax^2 + bx + c$ sólo puede cambiar de signo algebraico en r_1 y r_2 por la tanto el signo más o menos de $ax^2 + bx + c$ será constante en cada uno de los intervalos $(-\infty,\ r_1)$, (r_1 y r_2), (r_2, ∞).

Para determinar si estos intervalos son o no solución de la inecuación, se evalúa con un número *x* de prueba arbitrario en $ax^2 + bx + c$ para cada intervalo. Los resultados obtenidos sirven para ubicar el conjunto de soluciones de la desigualdad.

Un procedimiento sistemático para la resolución de inecuaciones cuadráticas es el siguiente:

1. Se trasladan todos los términos de la inecuación al miembro de la izquierda.
2. Se hallan los números críticos r_1 y r_2 de la ecuación cuadrática y se forman los intervalos $(-\infty,\ r_1)$, (r_1 y r_2), (r_2, ∞).
3. Se prueban con valores de fácil sustitución localizados en dichos intervalos para determinar cuáles son los que satisfacen la desigualdad.

Analizando la siguiente inecuación:

$X^2 - 9 > 0$

La solución es:

$X^2 = 9$

$X = \pm\sqrt{9}$

$X = \pm 3$

Los números críticos son:

$r_1 = +3$ y $r_2 = -3$

los intervalos pueden ser $(-\infty, -3)$, $(-3; +3)$, $(+3; +\infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad:

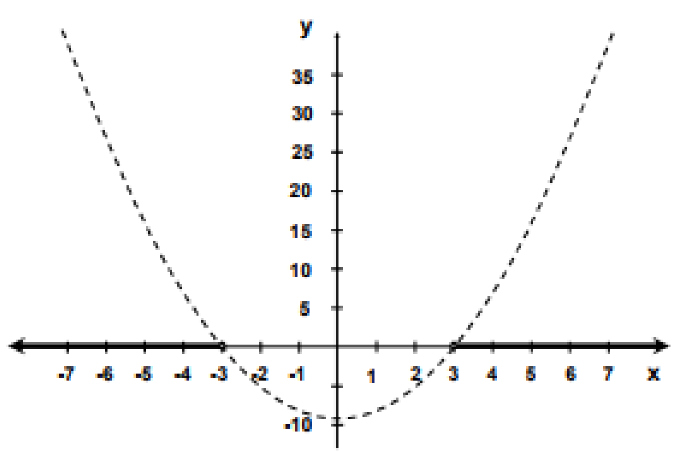
$$x^2 - 9 > 0$$

Para x = -4 del intervalo $(-\infty, -3)$; $(-4)^2 - 9 = 7 > 0$
Para x = 0 del intervalo $(-3; +3)$; $0^2 - 9 = < 0$
Para x = 4 del intervalo $(+3; +\infty)$; $4^2 - 9 = 7 > 0$

Los valores que cumplen la desigualdad son el primero y el tercero, por lo que la solución es:

$$(-\infty, -3) \cup (+3; +\infty)$$

La gráfica de la parábola se ubica por arriba del eje *x* en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son mayores que cero:



$(-\infty, 3] \cup [3, \infty)$

3.8. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Los modelos matemáticos son una aproximación a fenómenos del mundo real, las ecuaciones logarítmicas y exponenciales se ajustan de manera muy precisa a diversas situaciones y campos de trabajo del hombre; tales como: Química, Física, Biología, Economía, Ingeniería y otras, donde contribuyen a describir los fenómenos que pueden modelar.

ECUACIONES EXPONENCIALES

Se llaman ecuaciones exponenciales a las ecuaciones en las que en algún miembro aparece la incógnita en una expresión exponencial.

Por ejemplo:

a) $3^{2 - x2} = 3$
b) $4^{2x + 1} = (0,5)^{3x + 5}$
c) $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} = 7$

Inicialmente, como en cualquier ecuación, se trata de encontrar algún valor de x que cumpla la igualdad. En casos sencillos, eso se puede lograr por simple observación. Por ejemplo, si se nos plantea la ecuación: 2 x = 4, evidentemente el valor x = 2 es una solución.

Claro que no siempre será tan sencillo. Para resolverlas gráficamente, se representan las ecuaciones correspondientes a cada lado de la igualdad (en el ejemplo anterior: la función exponencial $y = 2^{x}$ y la recta y = 4).

El valor de la abscisa "x" del punto de intersección de ambas gráficas será la solución de la ecuación.

Para resolverlas analíticamente se pueden clasificar, en general, en dos tipos:

TIPO I

Corresponden a este tipo los dos primeros ejemplos:

a) $3^{2-x2} = 3$
b) $4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$

En ambos casos, a diferencia del otro, se observa que los dos miembros de la ecuación contienen un sólo término ("no hay sumas").

Para resolver analíticamente estas ecuaciones hay que conseguir que ambos miembros estén expresados como potencias de la misma base e igualar posteriormente los exponentes. Para ello hay que tener muy presentes las propiedades de las potencias.

Así, en el ejemplo b) se procede como sigue:

$4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$
$2^{2(2x+1)} = (1/2)^{3x+5}$
$2^{4x+2} = 1/2^{3x+5}$

$2^{4x+2} = 2^{-(3x+5)}$

$2^{4x+2} = 2^{-3x-5}$

Con lo que igualando los exponentes se obtiene la ecuación:
$4x+2 = -3x-5$, cuya solución es ya sencilla:
$7x = -7$; y finalmente
$x = -1$.

TIPO II

Se trata de ecuaciones exponenciales en las que en algún miembro aparece una suma de expresiones exponenciales que no se puede realizar.

Es el caso de la ecuación c). Para resolver analíticamente este tipo de ecuaciones se trata de conseguir que todas las expresiones exponenciales sean iguales y lo más sencillas posibles.
Se supone la ecuación:

$$2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} = 7$$

En este caso conviene escribir todo en función de 2^x , para lo que basta usar adecuadamente las propiedades de las potencias:

$$2^{x-1}=2^x .2^{-1}=2^x .1/2=2^x/2$$

Volviendo a la ecuación inicial:

$$2^x/2+ 2^x + 2·2^x = 7$$

Conseguido esto, se llama a $2^x = z$ con lo que queda la ecuación:

$z/2 + z + 2z = 7$; ecuación de primer grado.

Una vez resuelta se obtiene:
$z = 2$, con lo que volviendo al cambio realizado:

$2^x = 2$. Ecuación exponencial del tipo I, cuya solución es:
$x = 1$.

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que aparece la incógnita o incógnitas dentro de un logaritmo. Por ejemplo:

$$\log(x+6) = 1 + \log(x-3)$$

La forma de resolverlas es la misma cualquiera que sea la base del logaritmo. Para resolver numéricamente las ecuaciones logarítmicas se trata de conseguir una ecuación del tipo:

$\log_b(...) = \log_b(...)$

Para ello se deben tener muy claras las propiedades de los logaritmos. A partir de la definición de logaritmo de un número (a) en una cierta base (b):

$\log_b(a)=n$ de forma que $b^n=a$

Se deducen las propiedades de los logaritmos; las más importantes para resolver las ecuaciones logarítmicas son:

- $\log_b A + \log_b B = \log_b (A\cdot B)$ (permite agrupar en un sólo término una suma de logaritmos)
- $\log_b A - \log_b B = \log_b (A/B)$ (permite agrupar en un sólo término una diferencia de logaritmos)
- $n\cdot \log_b A = \log_b A^n$ (que se usará si es necesario antes que las dos anteriores). En este caso hay que tener en cuenta que si "n" es un número fraccionario, dentro del log quedará una raíz.
- $n = \log 10^n$ (y en particular: "$0 = \log_b 1$"; $1 = \log_b b$)

Usando estas propiedades se pueden resolver las ecuaciones logarítmicas más frecuentes. La ecuación inicial se resuelve de la siguiente manera:

$$\log(x+6) = 1 + \log(x-3)$$

$$\log(x+6) = \log 10 + \log(x-3)$$

$$\log(x+6) = \log 10(x-3)$$

Con lo que ya está la ecuación reducida a la forma adecuada y la solución será la misma que la de la ecuación:

$x+6 = 10(x-3)$ que es $x = 4$.

<u>EJERCITACIÓN:</u>

1- Resuelva cada ecuación lineal.

a) $5 + 6x = 2$
b) $4b + 1 = -18$
c) $18x - 3 = 0$
d) $5y +1 = 6$
e) $5 - 2x = 9$
f) $- 3x +1 = 4$
g) $- 2 - 5x = 0$
h) $x = 6 - x$ i) $5 = -9 - x$
j) $5x - 9 = 3x + 5$
k) $2K + 7 = 12 - 3K$
l) $10 - 4x = 7 - 6x$
m) $2 + 3x = 8 - x$
n) $- 3x + 5 = 4 - x$
o) $4 - 2t = t - 5$
p) $x+ 8 = 3x + 1$
q) $2x - 6 = 3x +1$
r) $2\ 1 - 2 - x =$
s) $x - 6 = 18 - 7x$
t) $3x -1 = x -11$
u) $2x - 8 = 9x -10$
v) $3x - 4 = x + 6$
w) $3x - 7 = 5x + 2$
x) $2(x -1) = 1- 6x$

2- Resuelva cada ecuación:

a) $5y - 3{,}2 = 2y + 2{,}8$
b) $3x - 15 + 2x - 14 = x - 11$
c) $48y - 13 + 12y = 72y - 3 - 24y$
d) $y - 3 + 6y - 9 + 12y - 15 = y$
e) $6x + 12x - 9 - 8x + 10 + x = 0$
f) $15z + (4 - z) = 9 - (z - 6)$
g) $2(3x - 1) + 7 = 8x - (3 - 2x)$
h) $3 - (8x - 5) + (6 - 7x) + 3 = 7x - (5x + 9 - 3)$
i) $-(4x - 6) + 9 = 7x - (1 - 6x)$
j) $12y = 3(3y - 5)$
k) $3x - 1 = 2(x - 1)$
l) $2(x + 2) - 5(2x - 3) = 3$
m) $7 - 6(x - 1) = 7 + 2(7x - 4)$
n) $21 - [5x - (3x - 1)] = 5x - 12$
o) $3[2 - (3x - 6)] - 4(1 - 2x) = 4 - 5x$
p) $2 - \{2m + [2m - (2 - 2m)]\} = 2$
q) $2 - 3(r - 7) - 7r = 4(r - 2) + 8$
r) $8 - 2(x - 3) = 4 + 2(x - 3)$
s) $5(2 - 3x) = 3(2 - 3x)$
t) $10x - 4(x + 1) = 13 + 3x$

3- Resuelve:

a)
$$\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} = \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$$

b)
$$2 - \left[-2\cdot(x+1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

c)
$$\frac{5}{x-7} = \frac{3}{x-2}$$

d)
$$\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$$

4- Resuelva cada inecuación lineal:

a) $5x + 1 < 6$
b) $x \geq 6 - x$
c) $5 < -9 - x$
d) $2 + 3x \leq 8 - x$
e) $-3x + 5 \leq 4 - x$
f) $4 - 2t > t - 5$
g) $x + 8 \leq 3x + 1$
h) $2x - 6 > 3x + 1$
i) $-2 - x < 4$
j) $x - 6 \leq 18 - 7x$
k) $3x - 1 \leq x - 11$
l) $2x - 8 \geq 9x - 10$
m) $3x - 4 < x + 6$
n) $3x - 7 < 5x + 2$
o) $2(x - 1) < 1 - 6x\ 2$

5- Resuelva cada inecuación lineal:

a) $2/3\,x > 7$
b) $2x + 1/3 \geq 2$
c) $-2 - x < 1/2$
d) $5(2 - 3x) > 3(2 - 3x)$
e) $10x - 4(x + 1) \geq 13 + 3x$
f) $3(2x - 3) \geq 2(x + 5) - 1$
g) $3 - (x - 6) \leq 4x - 5$
h) $x + 3/2 > x/2 - 1$
i) $(5x - 6)/2 > x + 2$
j) $x + 3/4 < (5x - 2)/3 + 1$
k) $1 + (x + 3)/5 > 1 - x$
l) $1 - (x - 3)/2 \geq x/2 + 5$

6- Resuelva cada inecuación:

a) $(x - 2)^2 \leq x^2 + 1$
b) $x^2 + 3x/2 > x(x - 2) - 3$
c) $(x - 2)^2 < x(x - 4) + 8$
d) $(x - 2)^2 < (x - 4)(x + 4)$
e) $(3x - 5)/4 - (x - 6)/12 > 1$
f) $(x + 6)/3 - x + 6 \geq x/15$

7- Escriba usando desigualdades, definiendo claramente la variable.

a) Dentro de cinco años, Rosario tendrá no menos de 18 años.

b) Tengo a como máximo 500 pesos.

c) El doble de mi edad es inferior a 30 años

8. El largo de un rectángulo es 4cm más que el ancho.
a) Si el perímetro del rectángulo es mayor que 100cm, determine la variación del ancho del rectángulo.
b) Si el perímetro del rectángulo se encuentra entre 150cm y 300cm, determine la variación del ancho del rectángulo.

9. Un furgón pesa 875 kg. La diferencia entre el peso del furgón vacío y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales de idéntico peso, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en ese furgón?

10. Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por distintos métodos:

1. $\begin{cases} 2x+y=-10 \\ x-3y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2m-5n=14 \\ 5m+2n=-23 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6r-5t=-11 \\ 7t-8r=15 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x-2y=-3 \\ 7y-12x=17 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 8p-3q=8 \\ 2p+9q=15 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-4y=32 \\ 5x+y=38 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7p-3q=-28 \\ 5q-4p=16 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7x-y=75 \\ 5x-2y=42 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 12u-16v=24 \\ 3u-4v=6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -5x-15y=2 \\ x+3y=7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 8x+4y=36 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4p-3q=-2 \\ 20p-15q=-1 \end{cases}$

11. La otra tarde vi en un parking 39 vehículos, entre coches y motos, a los que les conté un total de 126 ruedas. ¿Cuántos vehículos de cada clase había en el parking?

12. En el aula de 3º A hay doble número de alumnos que en el aula de 3º C. Además se sabe que, si se pasan 8 alumnos de 3º A a 3º C, ambas aulas tendrán el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada una de estas aulas?

13. En un test de elección múltiple, se puntúa 4 por cada respuesta correcta y se resta un punto por una equivocada. Un estudiante responde a 17 cuestiones y obtiene 43 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

14. Hace 5 años, la edad de Sonia era triple que la de Roberto, y dentro de 10 años será doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

15. Calcula las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 25 m más larga que ancha y que el perímetro mide 210 metros.

16. La edad de un padre es el triple de la de su hija más 2 años y hace 5 años la cuadriplicaba. ¿Qué edades tienen padre e hija?

17. La suma de edades de una madre y su hija es 42 años. Cuando la hija tenga la edad de la madre esa suma será de 90. ¿Cuántos años tienen cada una en la actualidad?

18. Factorizar: $x^2 - 5x + 6 = 0$

19. Determinar k de modo que las dos raíces de la ecuación $x^2 - kx + 36 = 0$ sean iguales.

20. La suma de dos números es 5 y su producto es −84. Halla dichos números.

21. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

22. Para vallar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

23. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m².

24. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m².

25. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m respectivamente.

26. Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es 26/5.

27. Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

28. Dos caños A y B llenan juntos una piscina en dos horas, A lo hace por sí solo en tres horas menos que B. ¿Cuántas horas tarda cada uno separadamente?

29. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.

30. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm³ cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

31. Resuelve la siguiente inecuación de segundo grado:

a. $x^2 - 5x + 6 > 0$
b. $x^2 - 6x + 8 > 0$
c. $7x^2 - 3x \geq 0$
d. $x^2 + 2x + 10 < 0$
e. $- x^2 - 2x + 3 > 0$
f. $4x^2 + 12x + 9 \geq 0$
g. $(x + 1)^2 + 6x + 2 \geq 2(x + 3)(x - 2) + 4x$

32. Resuelve:

a) $\log x + \log 4 = 0$

b) $\log (x + 5) = \log x + \log 5$

c) $\log x = \log 2 + 2.\log (x - 3)$

d) $2.\log x - \log 3 = 1$

e) $\log (6x - 4) + \log (x - 7) = 2$

f) $\log (5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2} \cdot \log (x + 4)$

g) $2\log x - 2\log(x + 1) = 0$

h) $\log (5x + 2) - \log (3x + 20) = -1$

i) $\log_x 100 - \log_x 25 = 2$

j) $\log \sqrt{7x + 4} + \log \sqrt{2x - 2} = 1$

k) $\log \sqrt{8x + 2} - \log \sqrt{x - 4} = 1 - \log 2$

l) $\frac{\log (7 + x^2)}{\log (1 + x)} = 2$

m) $\log_3 x + 2\log_3(x - 6) = 4$

n) $3\log_2 x - \log_2(x + 1) = \log_2 \frac{x}{2}$

ñ) $\ln x^2 - 3\ln x + 2 = 0$

o) $\ln(2x - 1) - \ln x = 1$

p) $\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$ (ayuda: haz el cambio $\log_5 x = t$)