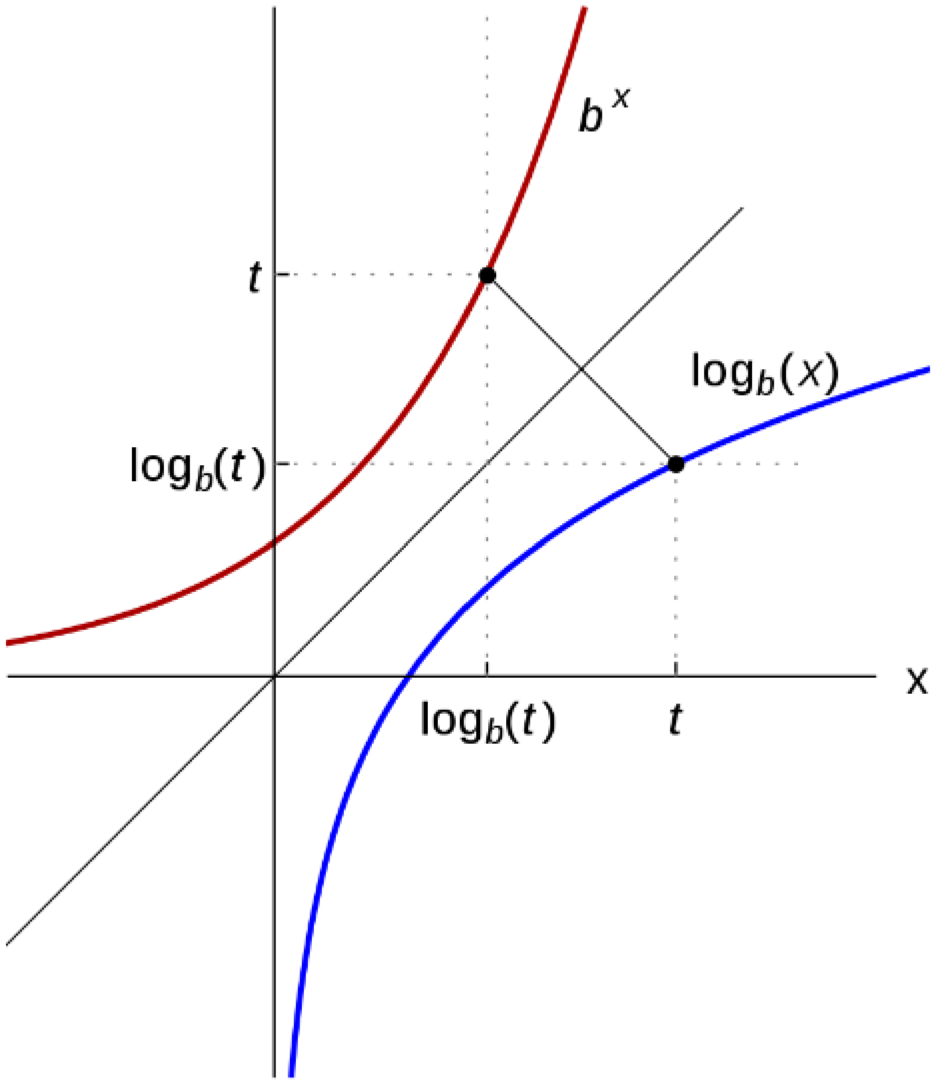
FUNCIONES

4



Objetivos:

- Utilización de las nociones de dependencia y variabilidad como herramientas para modelizar fenómenos de cambio que representen.
- Uso de diferentes representaciones de una función (coloquial, gráfica, algebraica, por tablas, etc.) para establecer las relaciones de dependencia entre las variables.
- Selección de la función más adecuada como modelo matemático para interpretar problemas de la realidad y comparación del modelo elegido de acuerdo con la necesidad que impone el problema.
- Análisis de comportamiento de las funciones.

FUNCIONES

4.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Las funciones en matemáticas, sirven para modelar diversas relaciones entre distintos fenómenos o situaciones, que suceden en nuestra vida cotidiana, que tienen una causa y efecto, por ejemplo, la cantidad de kilómetros por hora recorridos por un vehículo **depende** de la velocidad, el área de un cuadrado **depende** de la longitud de su lado y el costo de la producción está en **función** al valor de los materiales utilizados.

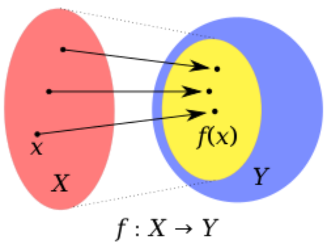
Una **función** es una relación entre dos magnitudes o cantidades, por ejemplo *x* y *f(x)*, de manera que a cada valor de la primera magnitud llamada ***preimagen***, le corresponde **un único valor de la segunda**, llamada ***imagen***.

La primera magnitud es la **variable independiente** y a la segunda magnitud o **imagen** (que se deduce de la primera) se dirá que es la **variable dependiente.** Por ejemplo, si la variable independiente es ***x***, la variable dependiente será ***f (x)***, que se lee "f de x", la cual generalmente se designa con la letra ***y***. Entonces, se dirá que ***y es función de x, o que y depende de x***.

Al conjunto inicial o de partida donde están los valores de la variable independiente se le llama ***dominio*** que se abrevia ***Dom (f)*** y al conjunto final o de llegada donde están las imágenes se llama ***codominio*** que se abrevia ***Codom (f).***

Al conjunto de todas las imágenes de una función se le llama ***recorrido*** (o rango) y se abrevia ***Rec (f)***. El **recorrido es un subconjunto del conjunto de llegada codominio**, donde puede suceder que el recorrido sea un conjunto más pequeño que el codominio o que el recorrido coincida exactamente con el codominio.

Por ejemplo, para una función ***f*** de un conjunto **X** en un conjunto **Y,** la podemos representar matemáticamente de la siguiente forma:

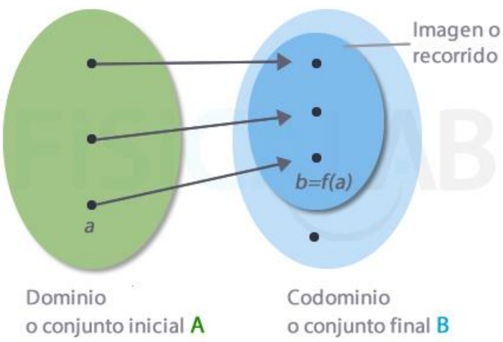


Aquí podemos ver como ***f (x)*** representa la transformación del elemento **x** por la función ***f*** lo que da como resultado el elemento ***y.*** Se dirá que ***y*** o ***f(x)*** es la imagen de ***x*** al ser procesada por ***f***.

Definición: Dos conjuntos no vacíos, **X** y **Y,** están relacionados matemáticamente como una **función *f*** de **X** en **Y**, si y sólo si a cada elemento de **X** le corresponde una única imagen en **Y**.

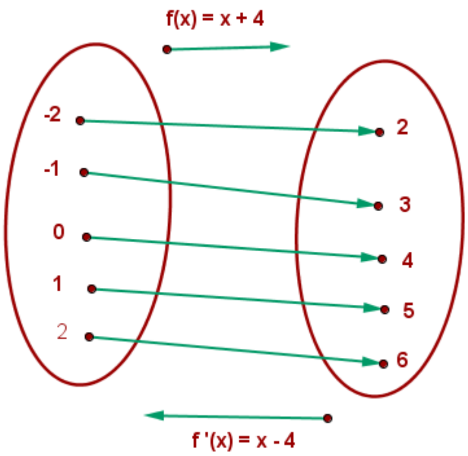
- ✓ El dominio de f es todo el conjunto X. Dom *(f)* = X.
- ✓ El recorrido de f es un subconjunto de Y. Que puede coincidir o no con el codominio.
- ✓ El codominio es todo el conjunto B.
- ✓ Un elemento del conjunto A no puede tener dos imágenes diferentes en B.
- ✓ Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Ejemplo 1: Sea la relación ***f***, definida por el diagrama**:**



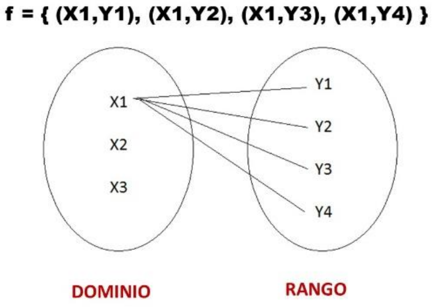
Podemos ver que para cada elemento de ***A***, existe **una sola imagen en *B***, por lo tanto, el diagrama sagital corresponde a una función ***f***, pero el **recorrido es más pequeño que el codominio**.

Ejemplo 2:



En este ejemplo, podemos ver que para cada elemento de ***A***, existe **una sola imagen en *B***, por lo tanto, este diagrama corresponde a una función, y a diferencia del primer ejemplo, el recorrido coincide con el codominio.

Ejemplo 3:



Este diagrama no representa una función f, ya que el elemento X1 tiene más de una imagen y, además los elementos X2 y X3 no tienen imagen.

4.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

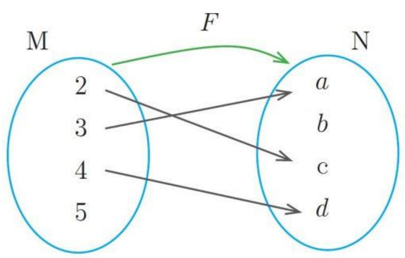
Una función ***f*** se puede representar de diferentes maneras entre las cuales está el diagrama sagital y el sistema de coordenadas o cartesiano.

DIAGRAMA SAGITAL

Un diagrama llamado ***sagital,*** es la representación de dos conjuntos, por ejemplo, **A** y **B** que **relacionan con flechas** cada elemento de A (preimagen), con su respectiva imagen en B. Se indica en la parte superior la relación de A en B con una flecha curva.

Ejemplo:

Sea una función f definida por; f = {(2,c), (3,a), (4,d)}



SISTEMA DE COORDENADAS O CARTESIANO

Las ecuaciones dadas para determinar una función, siempre tendrán dos incógnitas. Donde **x** será la variable independiente (preimágen) e **y** será la variable dependiente (imagen), por lo tanto, ***f (x) = y***. Entonces, para obtener los puntos deben reemplazarse los valores de x en la función y resolver. Es útil anotar estos datos en una tabla con los valores para x e y.

Para representar una función en el sistema de coordenadas, se consideran los elementos del dominio (conjunto de las preimágenes) en el eje horizontal de las abscisas (eje x) y los elementos del recorrido (imágenes) en el eje vertical de las ordenadas (eje y).

Se marcan los puntos correspondientes a cada relación, (x, y) y se unen con una línea continua, así obtenemos la representación gráfica de la función en el sistema de coordenadas.

Ejemplo:

Representar en el sistema cartesiano una función real ***f***, donde ***f (x)* = x + 1.**

Si se reemplazan los valores de x en la función:

- *f (1)* = 1 + 1 = 2

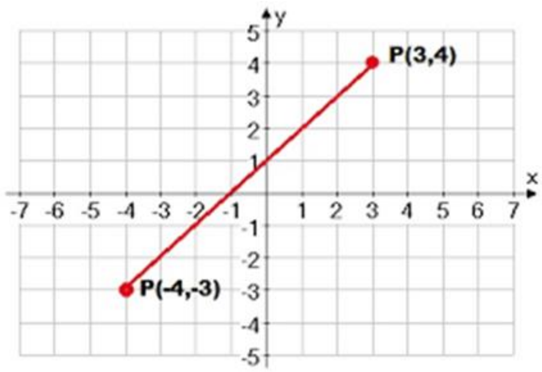
- *f (2)* = 2 + 1 = 3

- *f (3)* = 3 + 1 = 4

- *f (- 1)* = - 1 + 1 = 0

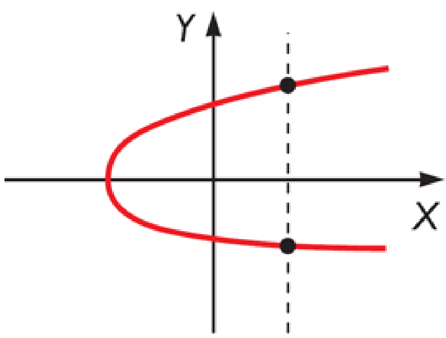
- *f (- 2)* = - 2 + 1 = - 1

Se obtienen las coordenadas (1,2) (2,3) (3,4) (-1,0) (-2,-1). Estos son sólo algunos de los puntos que se pueden obtener reemplazando los valores en la función, ya que, los puntos en esta función son ilimitados para los números reales.



Se puede ver que es una función lineal.
A través del sistema de coordenadas se puede determinar si un gráfico es o no una función, ya que si se analiza se pueden ver los valores que toman x e y.

Ejemplo
Indicar si este gráfico representa una función de x en y.



Este gráfico **<u>NO</u>** es una función, ya que a un mismo valor de **x** le corresponden dos imágenes en **y.**

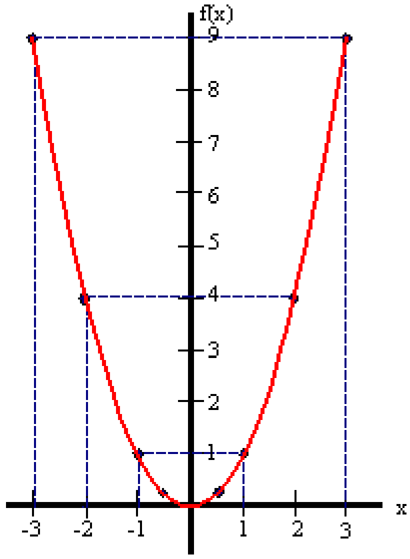
4,3. ¿CÓMO ENCONTRAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN REAL?

A partir de su representación gráfica

Para encontrar el dominio y el recorrido a partir de la representación gráfica de una función, hay que observar la proyección de ésta sobre el eje de coordenadas. Como ya es sabido, los valores del dominio se expresan en eje de las abscisas (eje x), y el recorrido en el eje de las ordenadas (eje y).

Ejemplo:

Determinar el dominio y el recorrido de la función a partir de su gráfica.



Se puede observar que todos los valores de la variable independiente x, son todos los números reales entre el – 3 y el 3, y los valores que toma la variable independiente y son los números reales entre el 0 y 9.

Entonces:

- El dominio de f corresponde a; Dom (f) = intervalo [-3, 3]

- El recorrido corresponde a; Rec (f) = intervalo [0, 9]

A partir de su representación algebraica

A partir de una representación algebraica se puede encontrar el dominio y recorrido de una función real, teniendo en cuenta los valores que pueden o no tomar las incógnitas ***x e y,*** respectivamente. ***Estos valores tienen que cumplir que; al ser reemplazados en la función, ésta no sea indeterminada, es decir, que la función sea real.*** Entonces, la función serán todos los números reales menos aquellos valores donde se indetermina.

Para determinar el dominio y recorrido de una función, hay que analizar los siguientes casos:

a) Cuando la incógnita x está en el denominador de la ecuación

Para encontrar el dominio de la función en estos casos, se debe recordar que cuando un número está dividido por cero, es un número indefinido, por lo tanto, el valor de la incógnita x no puede dar como resultado que el denominador sea 0.

Para determinar el recorrido de una función real, se debe hallar el dominio de su función inversa ***f^{-1} (x),*** para esto tenemos que despejar x, recordando que ***f (x) = y.***

Ejemplo:

Determinar el dominio y recorrido de la función real

$$f(x) = 2/(x-3)$$

Para determinar su dominio, se iguala a cero el denominador x – 3. El resultado será el valor que “no sirve” para la función:

$$X - 3 = 0$$
$$X = 3$$

Entonces, el dominio de la función es el conjunto de los números reales menos el 3, ya que, si se reemplaza la x con el número 3 la función sería indeterminada, es decir, no estaría dentro de los números reales. Se escribe matemáticamente:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$$

Para determinar el recorrido, se despeja f (x) = y.

$$Y = 2/(x-3)$$
$$X - 3 = 2/y$$
$$X = 3 + 2/y$$
$$X = (3y + 2)/y$$

Entonces ***y*** no puede ser cero; El recorrido de la función serían todos los números reales menos el 0.

$$\text{Rec } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

b) Cuando la incógnita x está en la cantidad subradical

Para determinar el dominio en estos casos, se tiene que considerar que cuando la cantidad subradical de una expresión es negativa, el resultado será un número indefinido, por lo tanto, los valores que tome la incógnita x, tienen que dar como resultado que la cantidad subradical sea igual o mayor que cero.

Para determinar el recorrido en estos casos, como el recorrido depende del dominio, será igual al conjunto de números reales positivos incluyendo al 0, ya que si reemplazamos el dominio, solo se obtendrán valores positivos para la función f (x).

Ejemplo:

Determinar el dominio y recorrido de la función real g (x) = $\sqrt{x-1}$

Para determinar su dominio, se sabe que la cantidad subradical tiene que ser mayor o igual a cero, por lo tanto:

$$X - 1 \geq 0$$

$$X \geq 1$$

Entonces, el dominio para esta función son todos los números reales mayores o iguales a 1.

$$\text{Dom } g = [1 \; ; \; +\infty)$$

Como lo explicamos anteriormente, el recorrido, son todos los números reales mayores o iguales a cero. Si lo demostramos, podemos partir con la primera cantidad de x que para esta función es 1, entonces:

$$g\ (x) = \sqrt{x-1}$$

$$g\ (1) = \sqrt{1-1}$$

$$g\ (1) = 0$$

$$\text{Rec } g = [1 \; ; \; +\infty)$$

c) Cuando la incógnita x está en un logaritmo.

La función logaritmo está definida de la forma:

$$f\ (x) = \log_x a$$

Siendo **a** un número fijo, positivo, distinto de 1.

Para encontrar el dominio cuando es una función logaritmo, se debe recordar que los logaritmos NO están definidos para los números negativos, por lo tanto el dominio tiene que ser mayor que cero. Por lo tanto, los valores que tome la incógnita **x** deben hacer que la función sea mayor que cero.

El recorrido es similar en todos los casos con logaritmos, por lo tanto son todos los números reales.

Ejemplo:

Determinar el dominio y recorrido de la función:

$$f\,(x) = \log_2 (x - 7)$$

Para determinar el dominio se sabe que **x – 7** tiene que ser mayor que 0 por lo tanto:

$$(x - 7) > 0$$

$$X > 7$$

Entonces x debe ser mayor que 7 para que se cumpla la función.

$$\text{Dom } f = (7\ ;\ +\infty)$$

$$\text{Rec } g = (-\infty\ ;\ +\infty)$$

4.4. CLASIFICACIÒN DE LAS FUNCIONES

Las funciones se pueden clasificar por la manera de relacionar los elementos del **dominio con los del codominio y recorrido.**

4.4.1- Función inyectiva o uno a uno

Una función es inyectiva cuando **cada elemento del recorrido es imagen de sólo un elemento del dominio,** es decir, ningún elemento del recorrido es imagen de dos preimágenes diferentes.

En lenguaje algebraico, una función f de A en B es inyectiva si x e y pertenecen al conjunto A (dominio) y, necesariamente se cumple que:

$$f\,(x) = f\,(y) \longrightarrow x = y$$

Dicho de otra manera:

$$f\,(x) \neq f\,(y) \longrightarrow x \neq y$$

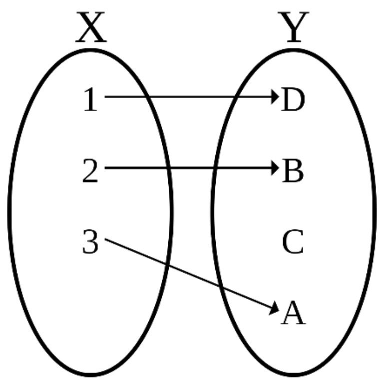
Si se representa una **función inyectiva**, en un diagrama sagital, de una función ***f*** de **A** en **B**, se vería que cada preimagen de **A solo tiene una flecha** hacia una imagen en **B**.

En las funciones inyectivas <u>no es necesario que el recorrido coincida con el codominio</u>.

También se conoce como **función uno a uno**.

Ejemplos:

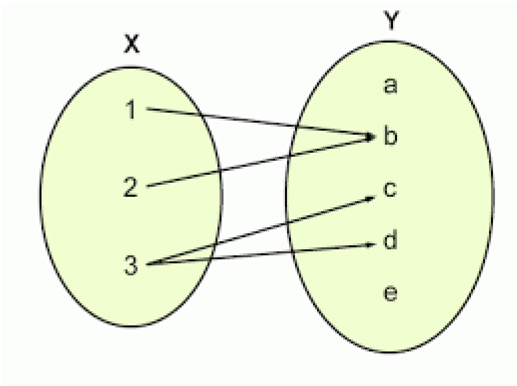
a) Determinar si la función del siguiente diagrama sagital es inyectiva.



Respuesta: Es una función inyectiva, ya que cada elemento del recorrido, solo recibe una flecha desde X, es decir, cada imagen solo tiene una preimagen.

Como se puede ver, el elemento C del conjunto Y es parte del codominio pero no pertenece al recorrido, pero, como no es necesario que estos coincidan, igual es una función inyectiva.

c) Determina si la función del siguiente diagrama sagital es inyectiva.



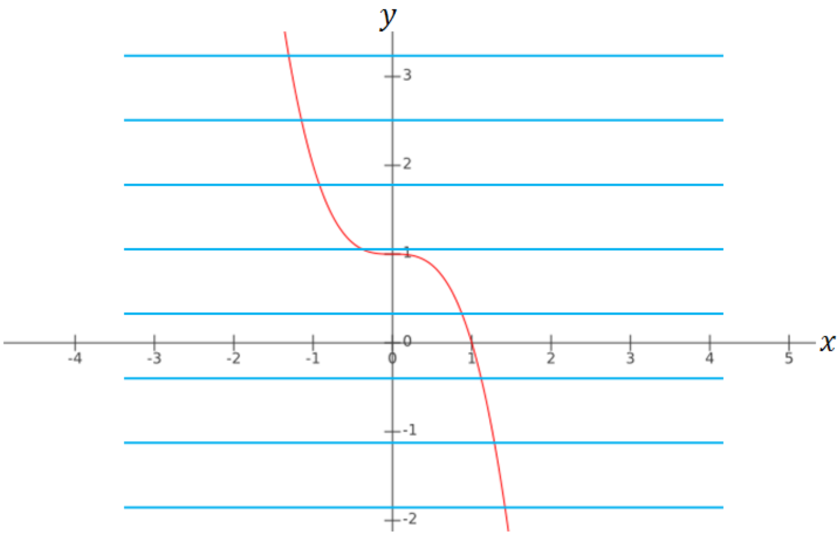
Respuesta: NO es una función inyectiva, ya que el elemento b del conjunto Y recibe dos flechas desde X, es decir, el elemento b es imagen de las preimágenes 1 y 2.

Criterio de la recta horizontal

También se puede determinar si una función es inyectiva a través de su representación gráfica en el sistema de coordenadas. Se utiliza el **criterio de la recta horizontal**, el cual, consiste en trazar (como dice el nombre), rectas horizontales. **Si la recta corta a la gráfica en un solo punto, la función es inyectiva**, y si corta en más de un punto la función no es inyectiva.

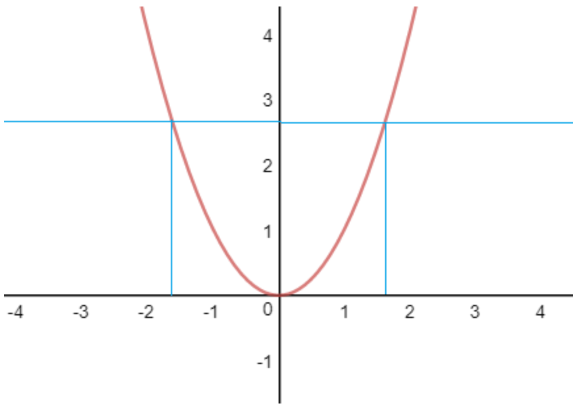
Ejemplos:

a) Para la gráfica de la función determina si es inyectiva.



Podemos ver que las líneas que trazamos, **cortan en un solo punto** a la gráfica de la función, ésto indica que **las imágenes no se repiten**, por lo tanto **f (x) es inyectiva**.

b) Para la gráfica de la función determina si es inyectiva.



Podemos ver que las líneas que trazamos, **cortan en dos puntos** la gráfica de la función, esto indica que **una misma imagen (y) se repite para dos preimágenes**, por lo tanto, la función **<u>NO</u> es inyectiva.**

Determinar de manera algebraica si la función es inyectiva

Otra forma para determinar si una función es inyectiva es de **manera algebraica**, esto se hace verificando si se cumple o no que; f (x) = f (y), x = y.

Ejemplos:

a) Determina si la función f(x) = 3 x – 1 es inyectiva.

Comprobamos si se cumple que f (x) = f (y);

Como $$f(x) = 3x - 1$$

Entonces $$f(y) = 3y - 1$$

Reemplazamos $$f(x) = f(y)$$

$$3x - 1 = 3y - 1$$

$$3x = 3y$$

$$x = y$$

Se cumple la afirmación, ya que si dos imágenes son iguales las preimágenes deben ser iguales, entonces la función **es inyectiva**.

b) Determina si la función $f(x) = x^2$ es inyectiva.

Comprobamos si se cumple que $f(x) = f(y)$:

$$f(x) = f(y)$$

$$x^2 = y^2$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x + y)(x - y) = 0$$

Entonces: $$x + y = 0 \quad ; \quad x - y = 0$$

$$x = -y \quad ; \quad x = y$$

No se cumple la afirmación, ya que, si dos imágenes son iguales, habrá dos preimágenes una positiva y otra negativa con la misma imagen. Por ejemplo, si reemplazamos dos elementos del dominio **$x = 2$ e $y = -2$, $f(2) = 2^2 = 4$**, y **$f(-2) = -2^2 = 4$**, podemos ver que tienen la misma imagen, por lo tanto **no es una función inyectiva**.

4.4.2- Función Sobreyectiva o Epiyectiva

Una función es sobreyectiva cuando todos los elementos del codominio son imagen de al menos un elemento del dominio, es decir, el codominio es igual al recorrido.

En lenguaje algebraico, una función f de A en B es sobreyectiva cuando;

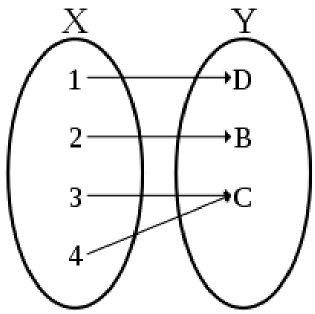
$$Rec(f) = B$$

Si se representara una **función sobreyectiva**, en un diagrama sagital, de una función ***f*** de **A** en **B**, veríamos que **todos los elementos B tienen al menos una flecha desde el conjunto A.**

También se conoce como **función epiyectiva.**

Ejemplos:

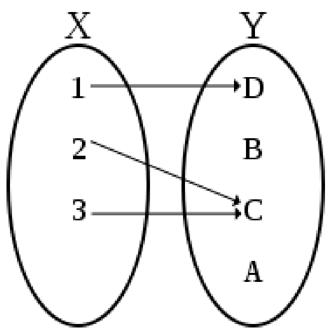
a) Determina si la función m, del siguiente diagrama sagital es sobreyectiva.



Respuesta: Es una función sobreyectiva, ya que cada elemento de Y recibe al menos una flecha desde X, es decir, todas las imagen tienen al menos una preimagen.

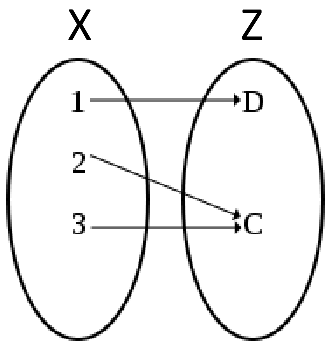
Como se puede ver, el elemento C es imagen de 3 y 4, esto no afecta para que sea función sobreyectiva.

b) Determina si la función del siguiente diagrama sagital es sobreyectiva.



Respuesta: NO es una función sobreyectiva, ya que los elementos B y A del conjunto Y no recibe flechas desde X, es decir, no es imagen de ningún elemento del conjunto F.

En el ejemplo anterior, se podría hacer que la función fuera sobreyectiva si se redefine su codominio. Se podría crear un nuevo conjunto por ejemplo, Z = Y – { A, B }, entonces la función de X en Z es sobreyectiva, porque todos los elementos de Z son imagen de un elemento en X.



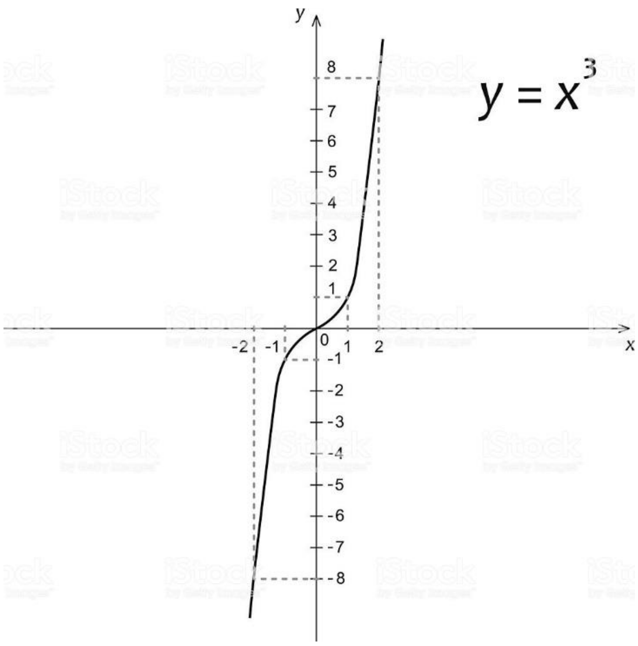
Representación gráfica

También se puede determinar si una función es sobreyectiva observando su representación gráfica en el sistema de coordenadas.

Ejemplos:

a) Determina si la función f (x) = x^3 es sobreyectiva.

Graficamos la función:



Resaltamos el recorrido (imágenes) de la función, para que se vea con más claridad si la función es sobreyectiva.
Entonces, en este caso, el dominio, el codominio y el recorrido son todos los números reales.

$$\text{Dom (f)} = \mathbb{R}$$

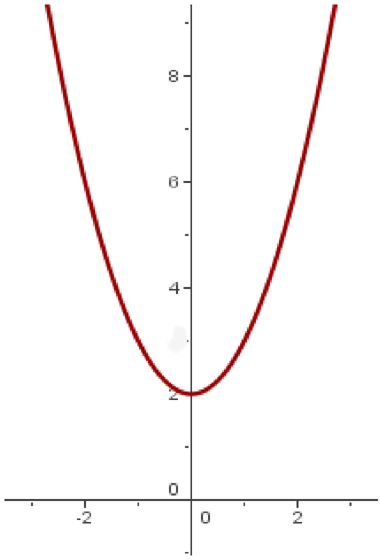
$$\text{Codom (f)} = \mathbb{R}$$

$$\text{Rec (f)} = \mathbb{R}$$

Por lo tanto, como el recorrido es igual al codominio **es** una función **sobreyectiva.**

b) Determinar si la función f: R > R, donde f (x) = $x^2 + 2$ es sobreyectiva.

Graficar la función:



También resaltamos el recorrido (imágenes) de la función, para que se vea con más claridad si la función es sobreyectiva.
Entonces, en este caso, el dominio, el codominio son todos los números reales, y el recorrido son todos los números reales mayores o iguales a 2.

$$\text{Dom (f)} = \mathbb{R}$$

$$\text{Codom (f)} = \mathbb{R}$$

$$\text{Rec (f)} = [2\ ;\ +\infty)$$

Como se puede, el recorrido y el codominio no coinciden, por lo tanto, **no es una función sobreyectiva.**

Se puede redefinir el codominio de la función f: R > R, donde f (x) = $x^2 + 2$, de modo que sea sobreyectiva.

En el ejemplo anterior, se ve que el recorrido de la función son todos los números reales mayores o iguales a dos. Por lo tanto, si en codominio (conjunto de llegada) fuera igual sería una función sobreyectiva, para esto podemos definir la función como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [2\ ;\ +\infty)$$

Entonces, como se redefinió el codominio para f (x) = $x^2 + 2$, y ahora el recorrido es igual al codominio, **la función es sobreyectiva.**

4.4.3- Función Biyectiva

Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, cuando todas las imágenes tienen una sola preimagen y no existen elementos del codominio que no tengan una preimagen.

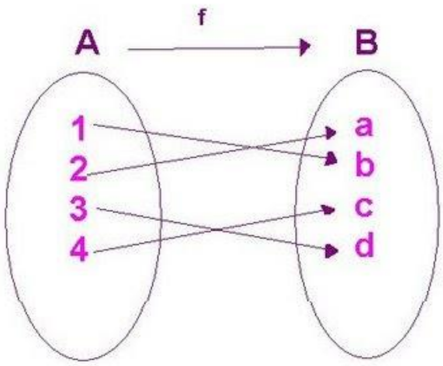
En lenguaje algebraico, una función f de A en B es biyectiva si se cumple que, siendo x e y elementos de A:

$$f(x) = f(y) \longrightarrow x = y$$

$$\text{Rec}(f) = B$$

Si se representa una **función biyectiva**, en un diagrama sagital, de una función ***f*** de **A** en **B**, veríamos que **todos los elementos B tienen sólo una flecha desde el conjunto A.**

Ejemplo de función biyectiva en un diagrama sagital.



Entonces, como una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez, puedes ocupar los métodos que ya se explicaron, y comprobar si se cumple esta condición.

Ejemplo:
a- Determina si la función f: R > R, donde f (x) = 2x – 1 es una función biyectiva.
Primero verificar si la función es inyectiva, Comprobando si se cumple que f (x) = f (y):

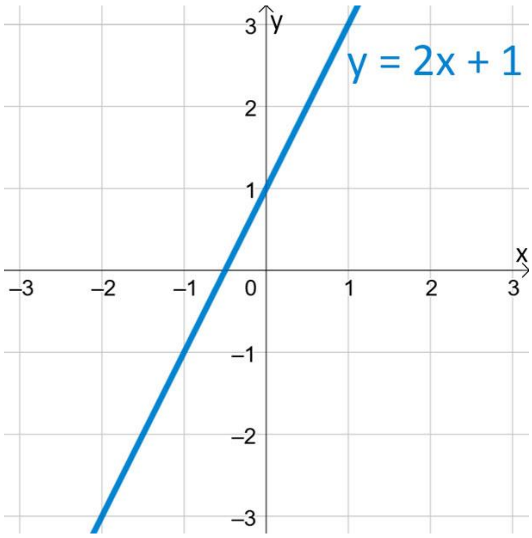
$$2x - 1 = 2y - 1$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

Se cumple la afirmación, ya que si dos imágenes son iguales las preimágenes deben ser iguales, entonces la función **es inyectiva**.

Ahora se verifica si es una función sobreyectiva, grafica de la función:

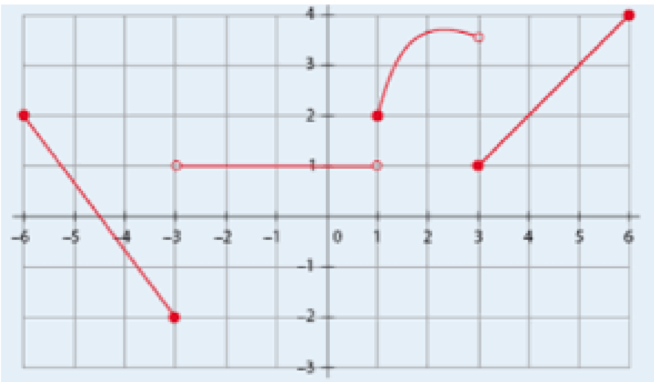


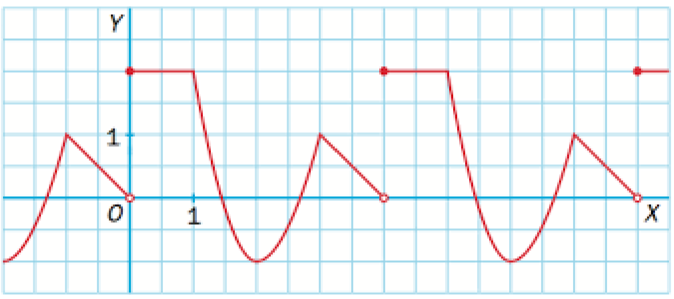
Se puede ver que:
- El dominio o conjunto inicial son todos los números reales.
- El codominio o conjunto final son todos los números reales.
- El recorrido (imagen) son también todos los números reales.

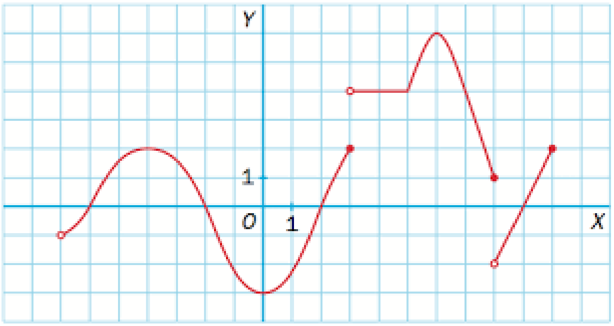
Entonces, el codominio y recorrido de **y** coinciden, por lo tanto es una función sobreyectiva. Ahora como la función es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es una función biyectiva.

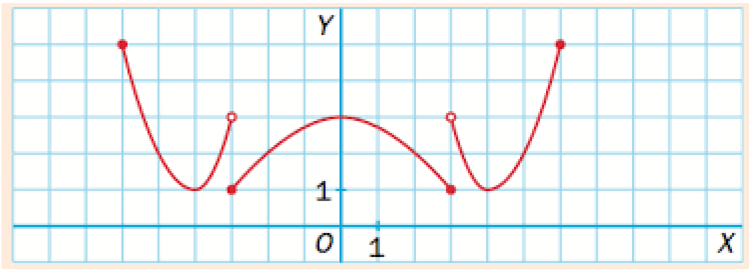
Ejercitación

1.- En cada una de las siguientes funciones calcula: a) Dominio y b) Recorrido









2.- Di qué tipo de función es cada una de las siguientes y efectúa su representación gráfica:

a) f (x) = 4
b) f (x) = 3x – 2
c) f (x) = -2x
d) f (x) = x^2 – 6x
e) f (x) = x^2 -4x + 3
f) f (x) = -x
g) f (x) = 2x + 1
h) f (x) = x^2 + 6x + 10
i) f (x) = -2
j) f (x) = x^2 – 5x + 6
k) f (x) = x
l) f (x) = x^2 – 16
m) f (x) = 5 . $(x + 2)^2$
n) f (x) = -2x + 1/3
ñ) f (x) = -2x^2 + 12x – 10

3.- Escribe la ecuación punto-pendiente, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta que: a) Pasa por el punto A (2,3) y tiene pendiente m = 5

4.- Para colaborar con las personas sin techo, una ONG elabora un periódico de reparto callejero. Cada vendedor recibe un fijo de 25 euros al mes y, además, 50 céntimos por ejemplar vendido. a)Escribe la fórmula y representa la gráfica de la función que relaciona el número de periódicos vendidos con el dinero recibido al mes. b) ¿Cuántos ejemplares tiene que vender un sin techo para cobrar en un mes 185 euros?

5.- Un depósito con 5000 litros de agua tiene una rotura por la que pierde 2 litros por minuto. Escribe y representa la función que relaciona los litros que quedan en el depósito con el tiempo transcurrido.

6.- La ecuación del espacio recorrido por un móvil es $s = 5 + 3t + 2t^2$

a) ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento?

b) ¿Cuál es la longitud recorrida durante el quinto segundo?

c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando ha recorrido 157 metros desde el inicio?

7.- Un gimnasio cobra a sus socios 20 euros de matrícula y una mensualidad de 35 euros.

a) Escribe una función que indique el dinero que paga un socio del gimnasio en función del tiempo (medido en meses)

b) ¿Qué tipo de función es?

c) Si Lorena se matricula en marzo, ¿cuánto habrá pagado al finalizar el año?

d) Representa gráficamente dicha función.

8.- Una motocicleta se desplaza a una velocidad constante de 35 km/h.

a) Escribe la ecuación de la función que relaciona el tiempo con el espacio recorrido.

b) ¿De qué tipo es? Obtén su gráfica.

c) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 245 km?

9.- Al abrir las compuertas de un estanque, el nivel de agua inicial es de 120 cm, y desciende a razón de 6 cm por minuto.

a) Haz una tabla en la que se refleje el nivel de agua (cm) en función del tiempo (minutos).

b) ¿Qué tipo de función es? Represéntala.

c) ¿Qué nivel de agua habrá a los 15 minutos?

d) ¿Cuánto tarda el estanque en vaciarse?

10.- A nivel del mar, el agua hierve a 100 °C, pero cada incremento de 100 m en la altitud supone una décima de grado menos para hervir. a) Calcula el punto de ebullición en las cimas del Aneto (3 404 m) y del Everest (8 850 m). b) Indica la expresión algebraica de la función Temperatura de ebullición–Altitud.

4.4. FUNCIÓN LINEAL

Se llama función de proporcionalidad directa o, simplemente, función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x, y). Su ecuación tiene la forma y = mx ó f(x) = mx.

El factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de pendiente de la función porque, como veremos en la siguiente sección, indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.

Dos magnitudes son directamente proporcionales si su cociente es constante.

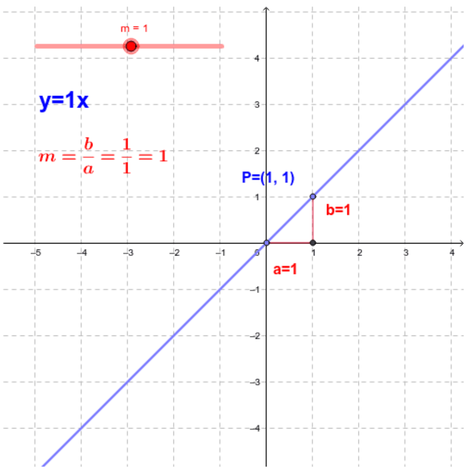
Representación gráfica

Como se ha visto, las funciones lineales se representan gráficamente como líneas rectas. Además, como:

$$y = mx$$

Si x = 0, entonces y = 0

Por lo tanto la gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto (0,0). Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la x e unir ese punto con el origen de coordenadas (0,0). Si x=1, entonces y=m, por tanto m representa la variación de la y por cada unidad de x, es decir, la inclinación o pendiente de la recta. Si m es positiva, representa la cantidad que sube la y por cada unidad de x y si m es negativa la cantidad que baja.



Función Afín

Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que las liga ya no es totalmente lineal (las magnitudes ya no son proporcionales). Se dice que es una función afín y su forma es:

$$y = mx + n$$

$$f(x) = mx + n$$

La pendiente, m, sigue siendo la constante de proporcionalidad y el término n se denomina ordenada en el origen porque es el valor que toma y (ordenada) cuando x vale 0 (abscisa en el origen).

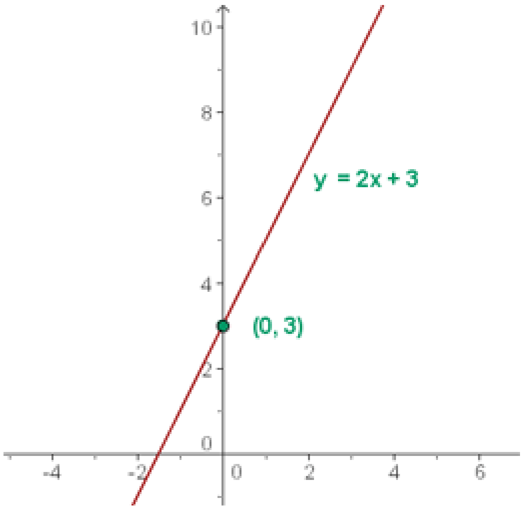
Representación gráfica

Las funciones afines se representan también mediante líneas rectas, pues el término independiente que las diferencia de las funciones de proporcionalidad solo produce una traslación hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de éstas.

Para dibujar la gráfica necesitamos obtener dos puntos:

• Uno lo proporciona la propia ecuación, pues, la ordenada en el origen, **n** indica que la recta pasa por el punto (0,n).

• El otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y. Uniendo los dos puntos se obtiene la gráfica de la función.



Ecuación de la recta

Forma punto-pendiente La ecuación y = mx + n se denomina forma **explícita** de la ecuación de la recta, y permite hallar dicha ecuación cuando se conoce la pendiente y la ordenada en el origen.

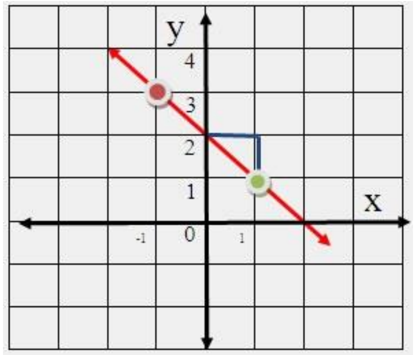
Cuando sólo se conoce la pendiente, m, y las coordenadas de otro de los puntos de la recta, (xo, yo), su ecuación es y - yo = m (x - xo) Esta ecuación recibe el nombre de forma puntopendiente de la ecuación de la recta.

Ejemplo:
Hallar la ecuación de la recta que pasa por P (1,1) y de pendiente m = -1

$$y - 1 = (-1)(x - 1)$$

$$y = - x + 1 + 1$$

$$y = -x + 2$$



Recta que pasa por dos puntos

Sean P (xo,yo) y Q (x1,y1) dos puntos del plano.

La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Esta ecuación recibe el nombre de forma continua de la ecuación de la recta. En la secuencia adjunta se explica cómo se obtiene.

Forma general o implícita

La manera más habitual de representar rectas es la forma general o implícita:

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son números cualesquiera (al menos A ó B deben ser diferentes de cero).

Si B=0 se trata de una recta vertical de ecuación x=-C/A. Si B no es cero la pendiente es -A/B. En los gráficos se muestran representaciones de rectas en forma general y el paso de otras formas a la general.

Posición relativa de dos rectas

Dadas dos rectas

$$y = m_1x + n_1 \qquad\qquad y = m_2x + n_2$$

Si $m_1 \neq m_2$ las rectas se cortan en un punto cuyas coordenadas se obtienen resolviendo el sistema. Se dice que las rectas son secantes. Si $m_1 = m_2$ las rectas son paralelas. Si, además, $n_1=n_2$ las rectas son coincidentes.

Análisis en forma general

Dadas dos rectas:

$$\mathbf{A_1x + B_1y + C_1 = A_2x + B_2y + C_2 = 0}$$

Si $A_1B_2 \neq A_2B_1$ son **secantes**. Al igual que antes las coordenadas del punto de corte se obtienen resolviendo el sistema.

Si $A_1B_2 = A_2B_1$ las rectas son **paralelas**.

4.5. FUNCIÓN CUADRÁTICA

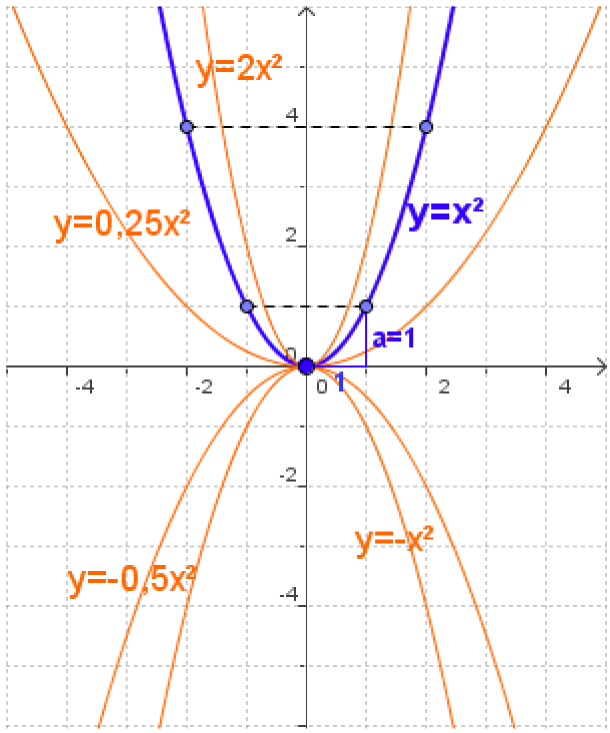
La parábola

$$y = ax^2$$

Las funciones cuadráticas son las que su expresión es un polinomio de segundo grado.

La más sencilla:

$$f(x) = ax^2 \text{ o } y = ax^2$$



Se observa en la figura cómo se construye su gráfica y cómo cambia según los valores y el signo de a.

La gráfica de $y = ax^2$ es una curva llamada parábola.

El vértice es el origen de coordenadas y es simétrica respecto del eje OY.

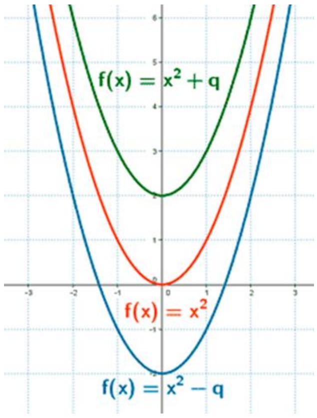
Si a>0 la curva se abre hacia arriba y si a<0 hacia abajo. La curva es tanto más cerrada cuanto más se aleja de 0 el valor de a.

Traslaciones de una parábola

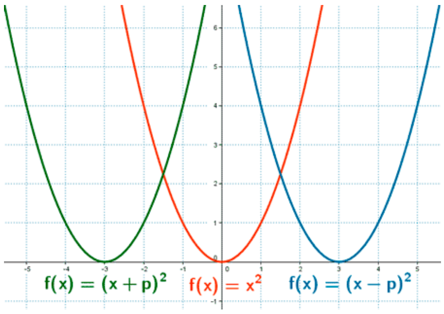
Como se puede ver a la derecha si se traslada el vértice de la parábola $y = ax^2$ de (0,0) a otro punto del plano, se obtiene la gráfica de una función cuadrática cualquiera

$$y = ax^2+bx+c$$

• Si se traslada el vértice de la parábola verticalmente, c unidades ($q > 0$ hacia arriba, $q < 0$ hacia abajo) se obtiene la parábola de expresión: $y = ax^2 + q$



• Si se traslada el vértice de la parábola horizontalmente k unidades ($p > 0$ hacia la derecha, $p < 0$ hacia la izquierda) se obtiene la parábola de expresión: $y = a(x – k)^2$



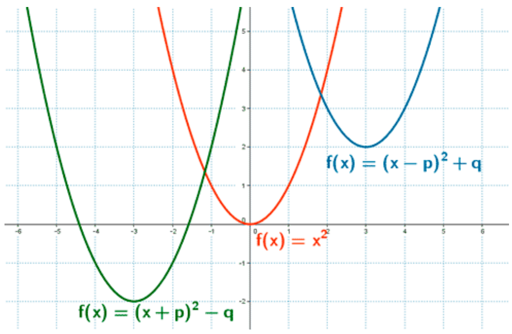
Combinando los dos movimientos, al trasladar el vértice de (0,0) al punto (p,q) se obtiene:

$$y = a(x – p)^2 + q \text{ y operando } y = ax^2 + bx + c$$

La gráfica de **$y = ax^2+bx+c$** es una **parábola** de la misma forma que la $y = ax^2$, eje vertical y **vértice (-b/2a, f(-b/2a))**.

Al igual que en otras representaciones gráficas es interesante hallar los puntos de corte con los ejes:

- El corte con el eje **Y** es **c**
- Los cortes con el eje **X** son las soluciones (si existen) de la ecuación **$ax^2+bx+c = 0$**



4.6. FUNCIÓN POTENCIA

La Función potencia, son todas aquellas funciones que son de la forma:

$$y = ax^n$$

Donde **a** y **n** son números reales distintos de 0. La Función potencia está definida para los números reales, entonces f: R → R.

Ejemplos:

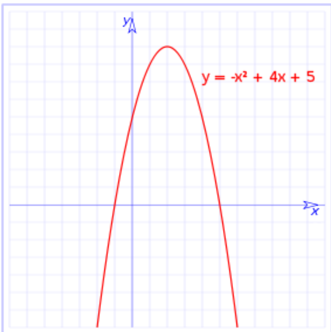
$$y = 2x^2 \qquad y = \frac{1}{2} x^3 \qquad y = x^{-4}$$

Grafica de las funciones potenciales
Se analizan los casos en que el exponente es un número entero, donde su gráfica dependerá si tiene un exponente par positivo, impar positivo, par negativo o impar negativo. Además, se verá cómo el valor de **a** influye en la gráfica.

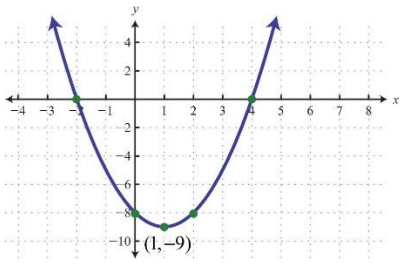
Cuando el exponente es par positivo.
Si el exponente **n** de la función **f(x) = ax^n** es un número **par positivo**, la gráfica será una curva simétrica con respecto al eje y.
El **dominio** de la función siempre serán todos los números reales.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

El **recorrido** de la función **dependerá del signo de a**;
- Si **a < 0**, la curva estará abierta **hacia abajo**, en el tercer y cuarto cuadrante, y el vértice será el punto más alto de la gráfica. El recorrido son todos los números reales negativos incluido el 0.
Ejemplo:



Si **a > 0**, la curva estará abierta **hacia arriba**, en el primer y segundo cuadrante, y el vértice será el punto más bajo de la gráfica. El recorrido son todos los números reales positivos incluido el 0.



Cuando el exponente es impar positivo

Si el exponente **n** de la función **f(x) = ax^n** es un número **impar positivo**, la gráfica será una curva simétrica con respecto al origen.

El **dominio** siempre es el conjunto de los números reales, es decir que **x** puede tomar cualquier valor real.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

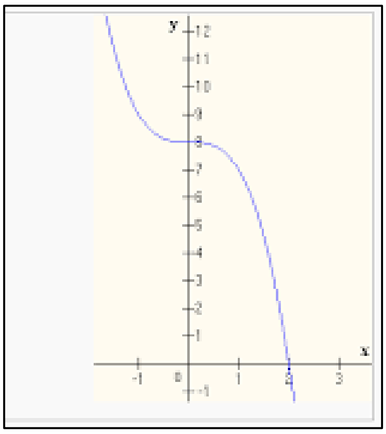
El **recorrido** siempre es el conjunto de los números reales, **independiente del valor que tome a.**

$$\text{Rec } f = \mathbb{R}$$

Pero cuando **a < 0**, la gráfica se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante, y la **función** siempre es **decreciente**.

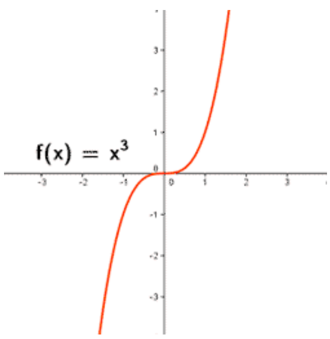
Ejemplo:

$$y = -x^3 + 8$$



Pero cuando **a > 0**, la gráfica se encuentra en el primer y tercer cuadrante, y la **función** siempre es **creciente**.

Ejemplo:



Cuando el exponente es par negativo.

Si el exponente **n** de la función **f(x) = ax^n** es un número **par negativo**, la función tiene dos asíntotas, que son los ejes x e y.
El **dominio** de la función son los números reales diferentes de 0.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

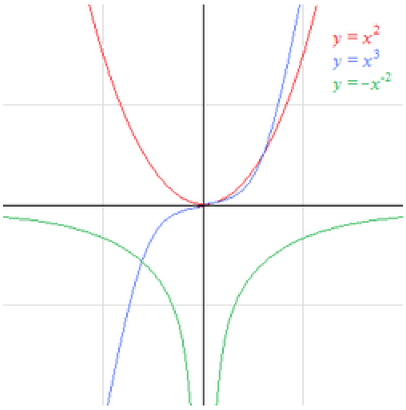
El **recorrido** de la función **dependerá del signo de a**;

- Si **a < 0**, las curvas irán hacia **abajo**, la gráfica estará en el tercer y cuarto cuadrante. El recorrido son todos los números reales negativos.

$$\text{Rec } f = \mathbb{R}^-$$

Para todos los valores **negativos** de **x**, la función **decrece**, y para todos los valores **positivos** de **x**, la función es **creciente**.

Ejemplo:



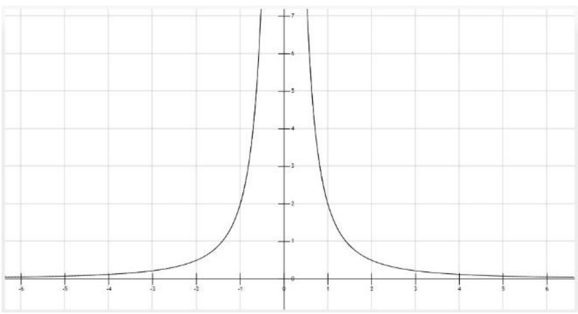
Si **a > 0**, las curvas irán hacia **arriba**, la gráfica estará en el primer y segundo cuadrante. El recorrido son todos los números reales positivos.

$$\text{Rec } f = \mathbb{R}^+$$

En este caso, para todos los valores **negativos** de **x**, la función es **creciente**, y para todos los valores **positivos** de **x**, la función es **decreciente**.

Ejemplo:

$$y = 2x^{-2}$$



Cuando el exponente es impar negativo

Si el exponente **n** de la función **f(x) = ax^n** es un número **impar negativo**, la función tiene dos asíntotas, que son los ejes x e y.

El **dominio** de la función son los números reales diferentes de 0.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

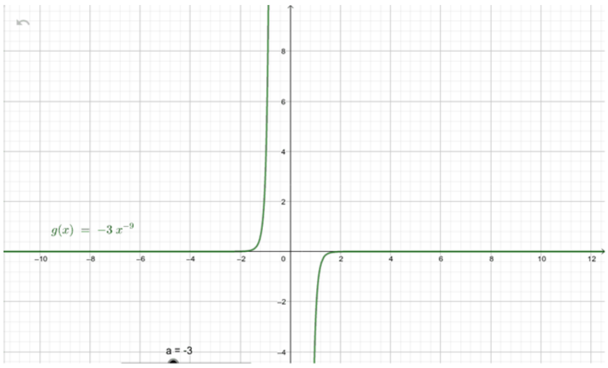
El **recorrido** de la función son los números reales diferentes de 0, **independiente del valor que tome a.**

$$\text{Rec } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

Pero, si **a < 0**, la gráfica estará en el segundo y cuarto cuadrante. **La función es creciente.**

Ejemplo:

$$y = -3x^{-9}$$



Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va acercando indefinidamente, se clasifican en tres tipos; Horizontales, verticales y oblicuas.

4.7. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Se llama *"exponencial"* a un número positivo elevado a una variable *x*, por ejemplo:

$$2^x, \quad (5.31)^x, \quad (\pi)^x$$

Aunque la función *exponencial* por excelencia en Matemáticas es e^x (siendo *e*=2.718281...), tal es así que a esta función se la suele expresar abreviadamente como exp(*x*), llamándola a secas "la *exponencial* de *x*".
Pero en general una función exponencial tiene la forma:

$$y = a^x$$

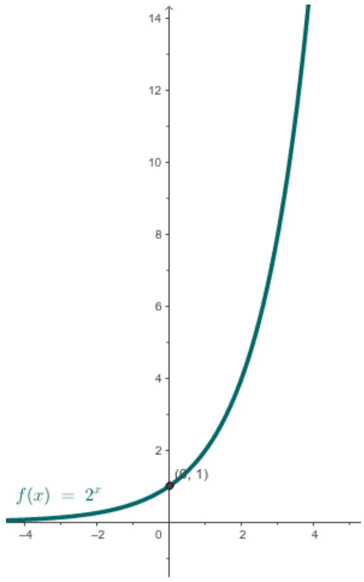
siendo ***a*** un número positivo distinto de 0.

Para dibujar las gráficas de estas funciones conviene considerar dos casos:

I) Exponenciales con *a* > 1.

Ejemplo:

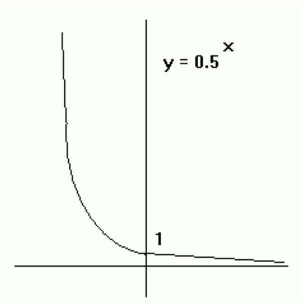
$$y = 2^x$$



En esta gráfica puede apreciarse cómo la función exponencial es siempre positiva; cuando *x* tiende a $-\infty$ la función tiende a anularse, mientras que por la derecha crece muy rápidamente hacia ∞ (2 elevado a 20 es superior a un millón). Toda función exponencial con *a* mayor que 1 tiene una gráfica muy similar a ésta.

A este caso pertenece la función $y=e^x$.

II) Exponenciales con $a < 1$.



Como puede apreciarse en la gráfica, la función exponencial es siempre positiva, pero en este caso el comportamiento de la función es el opuesto al caso anterior: es cuando *x* tiende a ∞ cuando la función tiende a anularse, por contra, crece rápidamente para valores negativos de *x*.

4.7. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Decimos que *logaritmo* (base *a*) de un número positivo N es *z*, lo cual expresamos:

$$\log_a N = z$$

Si se verifica:

$$a^z = N$$

En otras palabras, el logaritmo (base *a*) del número positivo N es el exponente al que hay que elevar la base *a* para obtener ese número N.

Se dice que el Logaritmo decimal (base 10) de 100 es 2, puesto que $10^2=100$ y se denota:

Log 100 (sin poner la base) = 2

En el caso de que la base sea el número *e = 2,7182818...* se llama "logaritmo natural" o "logaritmo neperiano" (en honor del matemático John Neper), lo cual se suele denotar:

Ln N

En Matemáticas generalmente se utilizan logaritmos decimales y neperianos, y escasamente se utilizan logaritmos en otras bases. Veamos las propiedades de los logaritmos:

* PROPIEDADES

Sean dos números positivos *x*, y, se tiene:

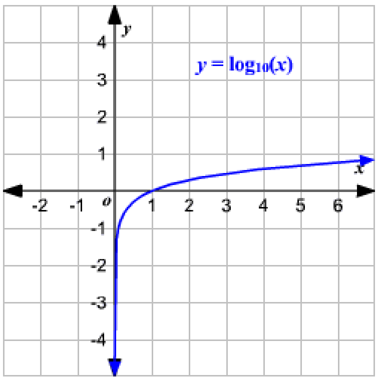
I) $\log (x \cdot y) = \log x + \log y$

II) $\log (x / y) = \log x - \log y$

III) $\log x^c = c \log x$ (siendo *c* un número positivo o negativo, entero o no)

Casos especiales:

- $\log (1 / x) = - \log x$ (según la propiedad II, o la III con el exponente -1)
- $\log \sqrt{x} = \dfrac{\log x}{2}$ (puesto que la raíz equivale al exponente ½)



Podemos observar:

1- Que sólo existe logaritmo para *x* positivo.
2- Que para *x*=1 el logaritmo se anula, cosa que es lógica pues $e^0 = 1$ y en general $N^0 = 1$.
3- Para el rango (0,1) el logaritmo es negativo.
4- Para *x* tendiendo a 0 el logaritmo se hace $-\infty$.
5- El logaritmo crece lentamente para valores positivos de *x*, y tiende a infinito lentamente cuando *x* tiende a infinito.

EJERCITACIÓN

1- Calcular el dominio de las siguientes funciones:
   A) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
   B) $f(x) = (2x + 3)/(x^2 - 4x + 3)$
   C) $f(x) = \sqrt{[(x + 1)/(x^2 - 4x + 3)]}$

2- Representa las siguientes rectas:

A) $y = 2$
B) $y = -2$
C) $y = x$
D) $y = 2x - 1$
E) $y = -2x - 1$
F) $y = ½x - 1$

3- Representa las siguientes funciones, sabiendo que:
   A) Tiene pendiente −3 y ordenada en el origen −1.
   B) Tiene por pendiente 4 y pasa por el punto (−3, 2).

4- En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función a fin que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

5- Cuando se excava hacia el interior de la tierra, la temperatura aumenta con arreglo a la siguiente fórmula:

$$t = 15 + 0.01\ h.$$

Donde t es la temperatura alcanzada en grados centígrados y h es la profundidad, en metros, desde la corteza terrestre. Calcular:
   A) ¿Qué temperatura se alcanza a los 100 m de profundidad?
   B) ¿Cuántos metros hay que excavar para alcanzar una temperatura de 100 ºC?

6- El nivel de contaminación de una ciudad a las 6 de la mañana es de 30 partes por millón y crece de forma lineal 25 partes por millón cada hora. Sea y la contaminación en el instante t después de las 6 de la mañana.
   A) Hallar la ecuación que relaciona y con t.
   B) Calcular el nivel de contaminación a las 4 de la tarde.

7- Resolver y representar la función cuadrática $y = x^2 + 2x + 1$

8- Resolver y representar la función cuadrática $y = x^2 + x + 1$

9- Halla el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas:
   A) $y = (x - 1)^2 + 1$
   B) $y = 3(x - 1)^2 + 1$
   C) $y = 2(x + 1)^2 - 3$
   D) $y = -3(x - 2)^2 - 5$
   E) $y = x^2 - 7x - 18$
   F) $y = 3x^2 + 12x - 5$

10- Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcular el valor de a.

11- Una parábola tiene su vértice en el punto V (1,1) y pasa por el punto (0,2). Halla su ecuación.

12- Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y=ax^2 + ax + a$ y pasa por el punto P(1,9). Calcular el valor de a. ¿Cuál sería su vértice?

13- Calcular b para que la parábola $y=x^2 + bx + 3$ pase por el punto P (2,-1). ¿Cuál sería su vértice?

14- Calcular m para que la parábola $y=x^2 + mx + 10$ tenga el vértice en el punto V(3,1). ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

15- ¿Cuánto debe valer k para que la parábola $y=4x^2 -20x + k$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas? ¿Para qué valores de k no cortará al eje x?

16- La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c? Si además sabemos que pasa por los puntos (1,3) y (4,6), ¿cómo calcularíamos a y b? Hallar a y b y representar la parábola.

17- Una parábola corta al eje de abscisas en los puntos x = 1 y x = 5. La ordenada del vértice es y=-2. ¿Cuál es su ecuación?

18- Calcular la expresión de una función cuadrática cuya intersección con el eje x son los puntos (2,0) y (3,0).

19- Con un listón de madera de 4 m de largo queremos fabricar un marco para un cuadro.
A) Indicar la expresión analítica de la función "Superficie" en función de la longitud x de la base.
B) Representar gráficamente la función anterior.
C) A la vista de la gráfica, ¿para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie? Interpretar el resultado.

20- Trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{(x + 2)}$

21- Graficar las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = (½)^x$.

22- La concentración de un medicamento en un órgano al instante (en segundos) está dada por: $x(t) = 0{,}08 + 0{,}12.e^{-0{,}02t}$
Donde x(t) son gramos/centímetros cúbicos (g/cm^3).
A) ¿Cuál es la concentración pasado 1 minuto?
B) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 0,18 g/cm^3 de medicamento en el órgano?

23- Resuelve las siguientes ecuaciones:
A) $\log_3 (4x - 2) = 2)$
B) $\log_5 (x + 6) + \log_5 (x + 2) = 1$
C) $\log(2x) - \log(x - 3) = 1$
D) $\log_4 (t + 2) = \log 8$

24- Representa gráficamente y di las propiedades de la función ***f*** cuya ecuación es ***f***(x) = $\log_2(x + 1) - 1$.

25- Representa gráficamente y di las propiedades de la función ***g*** cuya ecuación es ***g***(x) = $\log_2(x - 4)$.

26- Sea la función f definida por la ecuación f(x) = log3(x + 9) – 3.

A) Completa los espacios en blanco.

a) El dominio de la función f es ________________.

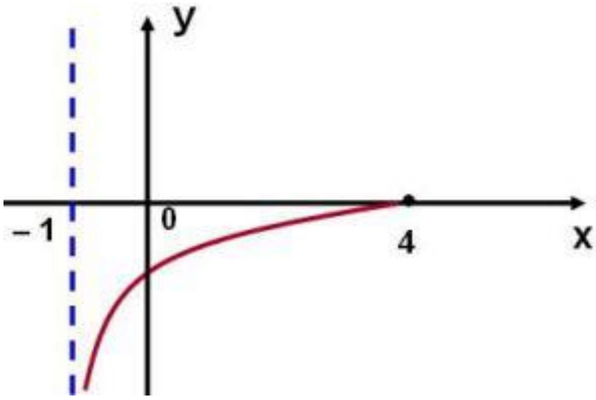
b) La función f es negativa para _________________.

c) La gráfica de f corta al eje de las ordenadas en y = _______.

d) La función es monótona ______________.

e) Para que el par (x_0;– 1) pertenezca a la función f, el valor de x0 debe ser _______.

27- En el sistema de coordenadas aparece la representación gráfica de una función de la forma $\boldsymbol{f(x) = \log_5(x + a) + b}$ con dominio $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leqslant 4\}$.



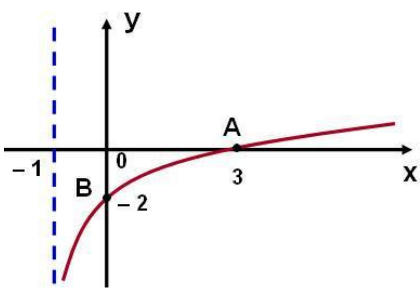
A) Escribe su ecuación.

B) Determina el conjunto imagen.

C) Analiza su signo.

D) Halla su valor máximo.

28- Completa el espacio en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera: El gráfico corresponde a una función g cuya ecuación es de la forma $g(x)= \log_2(x + a) + b$ definida para $\{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$. Si los puntos A y B pertenecen al gráfico de g entonces su ecuación es:____________.



29- El número de bacterias en cierta colonia aumentó de 600 a 1.800 entre las 7:00 A.M. y las 9:00 A.M. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, el número de bacterias t horas después de las 7:00 A.M, está dado por la siguiente función: $f(t) = 600.(3)^{t/2}$. Halla el número de bacterias en la colonia a las:

A) 9:00 A.M.

B) 11:00 A.M.